



БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •

ВЫПУСК 77

Г. А. ГАЛЬПЕРИН  
А. Н. ЗЕМЛЯКОВ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БИЛЬЯРДЫ





**БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •**

**выпуск 77**

---

**Г. А. ГАЛЬПЕРИН  
А. Н. ЗЕМЛЯКОВ**

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БИЛЬЯРДЫ**

**БИЛЬЯРДНЫЕ ЗАДАЧИ  
И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**



**МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1990**



ББК 22.18

Г17

УДК 519.83(023)

Серия «Библиотечка «Квант»

основана в 1980 г.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

Академик Ю. А. Осипьян (председатель), доктор физико-математических наук А. И. Буздин (ученый секретарь), академик А. А. Абрикосов, академик А. С. Боровик-Романов, академик Б. К. Вайнштейн, заслуженный учитель РСФСР Б. В. Воздвиженский, академик В. Л. Гинзбург, академик Ю. В. Гуляев, академик А. П. Ершов, профессор С. П. Капица, академик А. Б. Мигдал, академик С. П. Новиков, академик АПН СССР В. Г. Разумовский, академик Р. З. Сагдеев, профессор Я. А. Смородинский, академик С. Л. Соболев, член-корреспондент АН СССР Д. К. Фаддеев

**Рецензент**

доктор физико-математических наук *Л. А. Бунимович*

**Гальперин Г. А., Земляков А. Н.**

**Г17** Математические бильярды (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики). — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 288 с. — (Б-чка «Квант». Вып. 77)

ISBN 5-02-014080-5

Рассказывается о поведении бильярдного шара на столе произвольной формы без луз. Описание этого поведения приводит к решению разнообразных вопросов математики и механики: задач о переливании жидкости, об освещении зеркальных комнат, об осциллографе и фигурах Лиссажу и др. На доступном школьникам языке вводятся понятия конфигурационного и фазового пространства, понятия геодезических на простейших двумерных поверхностях, предлагаются (с решениями) многочисленные интересные задачи.

Для школьников 9—10-х классов.

Г 1604010000—012  
053 (02)-90 162-89

ББК 22.18

ISBN 5-02-014080-5

© Издательство «Наука».  
Главная редакция физико-математической литературы,  
1990



# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

Предисловие	5
Введение	7
<b>Часть I. БИЛЬЯРДЫ В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ</b>	24
<b>Глава 1. Бильярд в круге</b>	24
§ 1. Шар в круглом бильярде без луз	24
§ 2. Теорема Якоби. Применение к теории чисел	31
§ 3. Теорема Пуанкаре о возвращении. Конфигурационное и фазовое пространства. Парадокс Цермело и модель Эренфестов	42
<b>Глава 2. Бильярд в эллипсе</b>	60
§ 4. Эллипс и его бильярдные свойства. Каустики	60
§ 5*. Задача об освещении невыпуклой области	78
§ 6. Экстремальные свойства бильярдных траекторий. Принцип Ферма и теорема Биркгофа	89
<b>Часть II. ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИКА ПРЯМОУГОЛЬНОГО БИЛЬЯРДА</b>	100
<b>Глава 3. Геометрия прямоугольного бильярда</b>	100
§ 7. Бильярдный шар на прямоугольном столе без луз	100
§ 8. Тор и его обмотки	108
§ 9. Бильярд в прямоугольнике и тор	117
<b>Глава 4. Физика прямоугольного бильярда</b>	122
§ 10. Фигуры Лиссажу	122
§ 11. Бильярд в прямоугольнике и осциллограф	129
§ 12. Задача о пеленге	133
<b>Часть III. ГЕОМЕТРИЯ И АРИФМЕТИКА СТОЛКНОВЕНИЙ</b>	137
<b>Глава 5. Одномерный «газ» из двух молекул</b>	139
§ 13. Два упруго сталкивающихся шара на отрезке	139
§ 14. Два шара на отрезке: сведение к бильярду в треугольнике	147



§ 15. Два шара на полупрямой: сведение к бильярду в угле	153
<b>Г л а в а 6. Одномерный «газ» из большого числа молекул</b>	159
§ 16. Три упругих шара на прямой	159
§ 17. $n$ упругих шаров на прямой	165
§ 18*. Число столкновений между молекулами одномерного «газа»	178
<b>Г л а в а 7**. Многомерный «газ»</b>	187
§ 19. Конфигурационное пространство «газа» из $n$ молекул в пространстве и сосуде	190
§ 20. Сведение «газа» в пространстве и сосуде к бильярду	193
§ 21. Рост числа столкновений между молекулами «газа»	197
<b>Ч а с т ь IV. БИЛЬЯРДЫ В МНОГОУГОЛЬНИКАХ И МНОГОГРАННИКАХ</b>	206
<b>Г л а в а 8. Геометрия многоугольного бильярда</b>	207
§ 22. Бильярды в «торических» многоугольниках	207
§ 23. Склейка поверхностей из многоугольников	216
§ 24. Бильярды в «рациональных» многоугольниках и поверхности	226
<b>Г л а в а 9. Поведение бильярдных траекторий в многоугольниках</b>	235
§ 25. Траектории в рациональных многоугольниках и обмотки кренделей	236
§ 26. Может ли непериодическая траектория в выпуклом многоугольнике не быть всюду плотной в нем?	246
§ 27. Периодические траектории в многоугольниках и многогранниках	255
<b>Заключение</b>	282
<b>Список литературы</b>	287



## ПРЕДИСЛОВИЕ

В данной книге изучаются так называемые бильярдные системы. К простейшим из них относятся «бильярд в плоской области» (точечный шар, движущийся внутри круга, прямоугольника, эллипса, многоугольника и т. д.) и «одномерный бильярд» (конечное число точечных шаров, движущихся по отрезку, лучу или по всей бесконечной прямой). Общим свойством бильярдных систем является закон абсолютно упругого отражения. О геометрических, «арифметических», физических следствиях этого закона и рассказывается в книге.

Методы исследования бильярдных систем (например, анализ поведения бильярдных траекторий), с одной стороны, примыкают к традиционной геометрии, а с другой — лежат на стыке отраслей современной математики — теории чисел, топологии, эргодической теории и теоретической механики. Будучи, как правило, вполне элементарными, эти методы позволяют получить далеко не элементарные выводы.

Многие из излагаемых в книге результатов являются классическими и восходят к Кориолису, Больцману, Пуанкаре, Киркгофу. Современная теория бильярдов является одним из актуальных направлений математической физики. Ее основы были заложены советским математиком Я. Г. Синаем и его школой. Проблемы этой теории непосредственно близки к переднему краю сегодняшней математики. Поэтому книга, возможно, будет интересна не только школьникам, но и студентам, и специалистам — математикам, механикам, физикам. В ней сформулировано немало вопросов, остающихся открытыми, и мы надеемся, что кому-нибудь из читателей книги удастся продвинуться в их исследовании. Учитывая элементарность методов (при неэлементарности результатов) и плодотворность свежего взгляда на рассматриваемые вопросы и проблемы, мы особенно рассчитываем на читателей-старшеклассников.

Многие из решаемых в книге задач разбирались на занятиях кружков в физико-математической школе-интернате при МГУ, в летнем лагере Малой академии наук Крыма «Искатель». Часть материала публиковалась в журнале «Квант» (см. список литературы в конце книги). Некоторые идеи и результаты, приводимые в книге, неоднократно обсуждались с участниками семинара МГУ по теории динамических систем и с его руководителем Я. Г. Синаем \*).

---

\*) В течение долгого времени и до последних дней своей жизни этим семинаром вместе с Я. Г. Синаем руководил также замечательный математик и популяризатор науки В. М. Алексеев (1932—1980).

Этот семинар является одним из наиболее известных мировых центров по теории динамических систем и, в частности, по теории бильярдов; часть приводимых нами результатов принадлежит его участникам. Многолетнее участие авторов в работе этого семинара в значительной мере способствовало написанию этой книги.

Читателю не следует рассчитывать на легкое чтение — через некоторые параграфы, наверное, придется буквально продираться, вооружившись карандашом и бумагой, иногда — ножницами и клеем, а может быть, микрокалькулятором или компьютером. Книгу не обязательно читать подряд — напротив, проскочив (как бильярдный шар) через параграф или главу, читатель может найти интересующий его (и доступный ему) материал — потом можно и возвратиться.

В книге много отступлений от чисто бильярдной тематики, вызванных тем, что бильярды имеют отношение к большому числу интересных и, на наш взгляд, красивых задач, и поэтому мы надеемся, что читатель сможет разнообразить свои впечатления, узнать что-то новое и даже не совсем обычное.

Но стоит сразу предупредить любителей игры в бильярд — в нашей книге нет не только соответствующих полезных советов, но даже и правил этой древней игры. Эта книга — по м а т е м а т и к е, а любителям обычного бильярда мы можем порекомендовать публикации журнала «Наука и жизнь» (см. [1] в списке литературы) и книгу Г. Г. Кориолиса «Математическая теория явлений бильярдной игры» (М.: Гостехиздат, 1956), а также посетить возродившиеся чемпионаты страны по бильярду.

Как известно, «нестрогое» не означает «неверно», равно как и «строгое» не означает «уместно» или «интересно» (это высказывание принадлежит современному американскому физiku Дж. Лебовицу — одному из ведущих специалистов по статистической механике). Поэтому в большинстве важных математических вопросов (при изложении методов) мы старались придерживаться полной (насколько это возможно при принятом элементарном подходе) строгости, однако в ряде вопросов более общего (физического) характера (когда касались общих принципов или идей) ограничились интуитивным уровнем описания. Это следует иметь в виду и читателю-ригористу, и читателю-«физику», привыкшему больше доверять своей интуиции.

Представление о структуре книги можно получить не только из оглавления — в конце Введения, в котором сформулирована основная часть рассматриваемых далее вопросов и проблем, коротко рассказано и о последовательности изложения.

Читатель, заинтересовавшийся дальнейшими деталями «математики бильярдов» или другими подходами к излагаемым вопросам, может обратиться к списку литературы в конце книги.

Мы благодарны Я. Г. Синаю, внимательно прочитавшему всю рукопись и сделавшему много замечаний и предложений по улучшению ее текста, а также Л. А. Бунимовичу, Я. Б. Песину, А. М. Степину и Ю. П. Соловьеву, своими замечаниями способствовавшими улучшению отдельных мест книги.



## ВВЕДЕНИЕ

---

Читатель, конечно, имеет представление об игре в бильярд на прямоугольном столе с лузами (рис. В.1). Появившись до нашей эры в Индии и Китае, бильярд через много веков перекочевал в европейские страны — упоминание о нем имеется в

английских летописях VI века. Более поздние сведения о появлении бильярда в Европе относятся к XVI веку. Так, французский король Карл IX в Варфоломеевскую ночь \*) играл в бильярд, когда раздался условный звон колоколов

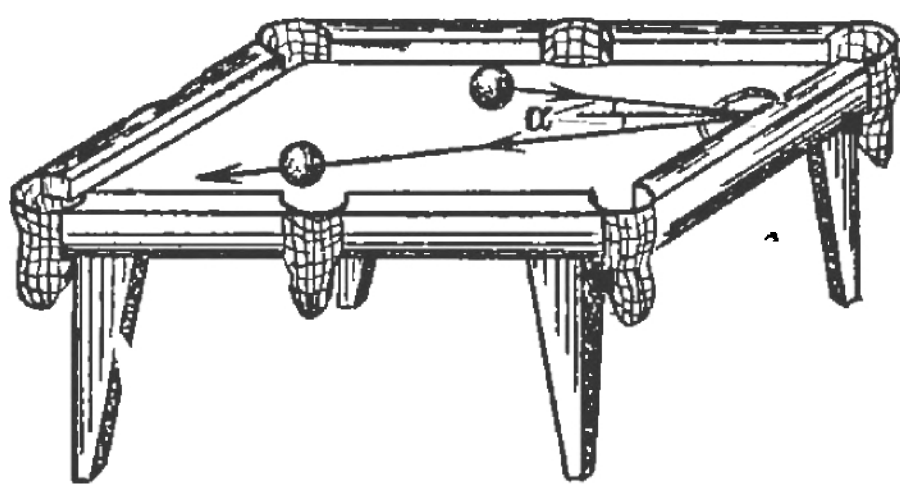


Рис. В.1

парижского собора Сен-Жермен Д'Акселеруа. Затем В. Шекспир в «Антонии и Клеопатре» \*\*) заставляет египетскую царицу Клеопатру играть в бильярд со своей фрейлиной (акт II, сцена 5; см. эпиграф к части III). В 1760 г. английский король Георг II издал указ, запрещающий игру в бильярд в общественных местах под страхом штрафа в 10 фунтов. В России бильярд стал известен и распространен при Петре I. Как правило, в бильярд играли на прямоугольном столе с шестью лузами, из которых четыре располагались в углах стола, а две — в серединах более длинных сторон; отличались эти игры лишь количеством шаров — иногда довольствовались тремя шарами (как, например, английский король Генрих VIII), а иногда — пятнадцатью или двадцатью.

---

\*) Варфоломеевская ночь (известная также под названием «парижская кровавая баня») — историческое событие, происшедшее в ночь на 24 августа 1572 г., когда католики учинили избиение гугенотов (французских протестантов).

\*\*) Шекспир В. Полное собрание сочинений: В 8 т. Т.7. — М.: Искусство, 1960. Трагедия написана в 1616 г.

Подобно тому как азартная игра в кости вызвала к жизни «исчисление» вероятностей, игра в бильярд послужила предметом серьезных научных исследований по механике и математике. Описанию движения бильярдного шара (с учетом трения) на прямоугольном столе с лузами посвящена книга известного французского физика Г. Г. Кориолиса, написанная им в 1835 г. за год до избрания его академиком Парижской академии наук.

Известны различные варианты игры на бильярде. Например, так называемый французский бильярд вообще не имеет луз (при игре во французский бильярд нужно попасть в заданный шар после нескольких столкновений с другими шарами — см. литографию известного художника XIX века А. Оберландера на второй странице обложки). Французский бильярд и послужил прообразом математического бильярда, которому посвящена эта книга.

Представьте себе горизонтальный бильярдный стол произвольной формы, но без луз. По этому столу без трения движется точечный шар, абсолютно упруго отражаясь от бортов (рис. В. 2). Спрашивается, *какой может быть траектория этого шарика?*

*Математическая проблема бильярда, или проблема траекторий*, состоит в том, чтобы найти ответ на этот вопрос. Описанная механическая система — точечный шар в бильярдной области  $Q$ , ограниченной бортом  $\Gamma$  (границей области  $Q$ ), — и называется *математическим бильярдом*. Траектория бильярда в области  $Q$  определяется начальным положением точки  $q$  ( $q \in Q$ ) и начальным вектором ее скорости  $\mathbf{v}$ . Пренебрежение трением означает, что абсолютную величину скорости  $\mathbf{v}$  при движении точки мы считаем неизменной во времени, поэтому задаваемый в начальный момент времени  $t=0$  вектор  $\mathbf{v}$  можно считать единичным, характеризующимся лишь своим направлением. Направление вектора  $\mathbf{v}(t)$ , т. е. направление движения шара, меняется только при его ударе о борт. Это происходит по закону абсолютно упругого отражения: после удара шара (точки  $q(t)$ ) о борт  $\Gamma$  в точке  $P$  шар движется так, что его «угол падения равен углу отражения». Если борт  $\Gamma$  в окрестности точки  $P$  криволинейный, то углы падения и отражения — это углы, составленные «падающим» и «отраженным» отрезками траектории с касательной  $MM$  к кривой  $\Gamma$ , проведенной в точке  $P$  (рис. В. 2) \*). Таким образом,

---

\*) В физике обычно принято отсчитывать углы падения и отражения от нормали к кривой  $\Gamma$  в точке  $P$ . Нам удобнее отсчитывать углы от касательной.

траектория бильярда — это вписанная в кривую  $\Gamma$  ломаная, которая может быть однозначно построена по своему начальному звену.

Борт  $\Gamma$  бильярда может иметь и точки излома — типа точек  $A_1, A_2, \dots$  на рис. В.2. Касательная к кривой  $\Gamma$  в такой точке не определена. Поэтому бильярдную траекторию, попадающую в такую точку, мы будем считать оканчивающейся в ней. Такие «тупиковые» траектории в определенном смысле исключительны, и мы их, как правило,

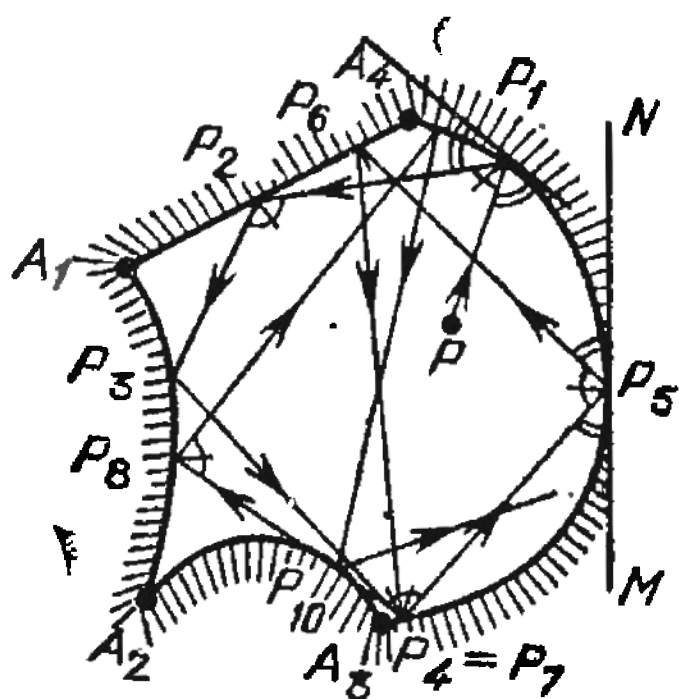


Рис. В.2

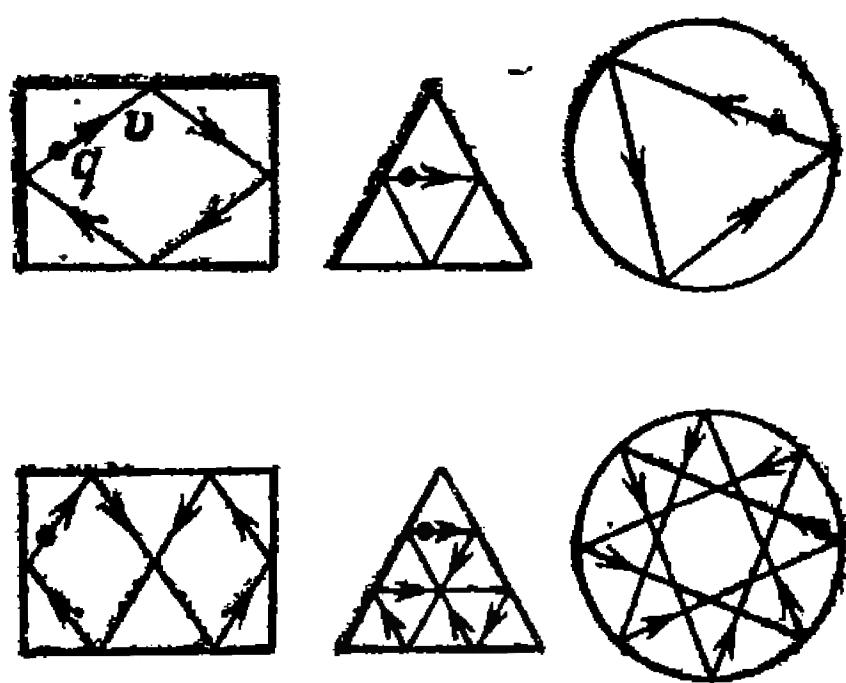


Рис. В.3

рассматривать не будем. Сформулированная выше проблема траекторий относится к поведению неособых, бесконечных во времени траекторий.

Общая математическая проблема бильярда заключается в том, чтобы описать возможные типы бильярдных траекторий в данной области  $Q$ . Простейший принцип такого описания — разделение траекторий на *периодические*, или *замкнутые*, и остальные — *непериодические*. На рис. В.3 изображены некоторые периодические траектории бильярдных в прямоугольнике, в правильном треугольнике, в круге.

Траектория с «начальным условием»  $(q, v)$  будет периодической (или замкнутой), если через некоторое время (через период) точка возвращается в свое начальное положение  $q$  с первоначальной скоростью  $v$ . Периодические движения воспринимаются как наиболее «правильные» — такими мы привыкли представлять, например, движения планет около Солнца и качания маятника. Рассматриваемая проблема в отношении периодических траекторий сводится, в частности, к вопросу о *существовании*: в любой ли области  $Q$  существуют периодические (замкнутые) траектории? Другой вопрос — о *критерии периодичности*: как

по данным начальным условиям  $(q, \vartheta)$  узнать, будет ли соответствующая траектория периодической?

В первых двух частях книги мы найдем критерии периодичности для бильярдов в круге и в прямоугольнике. Во второй главе будет решен и вопрос о существовании периодических траекторий бильярда в произвольной выпуклой области с гладкой (без изломов) границей. А вот этот же вопрос для бильярдов в многоугольниках (даже в тупоугольных треугольниках!) до настоящего времени остается открытым. Иначе говоря, неизвестно, в любом ли многоугольнике (или тупоугольном треугольнике) существуют периодические траектории. А ведь этот вопрос, по сути, относится к элементарной геометрии. Известные нам сведения по данному поводу приведены в гл. 9.

Интерес представляют и такие вопросы: *Какое число звеньев может иметь периодическая траектория? Какие периоды имеют периодические траектории в данной области (если принять минимальный период периодической траектории, скажем, за единицу)?*

Оказывается, это далеко не праздные вопросы — например, они имеют прямое отношение к исследованию специальных систем квантовой механики. Однако объяснение этого выходит далеко за рамки наших возможностей в данной книге.

Взамен рассмотрим элементарную задачу совсем из другой области, изящно решаемую с помощью бильярдов. Речь пойдет о «переливаниях», которые, казалось бы, не имеют уж ничего общего с бильярдами. Начнем с классической головоломки.

*Имеются два сосуда вместимостью 7 и 11 литров и большая бочка, наполненная водой. Как с помощью этих двух сосудов отмерить ровно 2 литра воды?* Всякие уловки запрещены, т. е. на сосудах нельзя делать никаких отметок, их нельзя наклонять, чтобы отмерять доли литра, и т. д.

Предложенная задача решается либо алгебраическим методом, либо методом проб и ошибок. При чем же здесь бильярдные шары?

Как ни странно, но головоломки на переливание жидкостей можно очень легко решать, вычерчивая бильярдную траекторию шара, отражающегося от бортов ромбического стола! Границы таких столов удобнее всего рисовать на бумаге, на которую нанесена сетка из одинаковых равносторонних треугольников. В рассматриваемой задаче стороны стола должны иметь длины 7 и 11 единиц (рис. В.4). По





кроме как во введении об этих задачах мы говорить больше не будем, поговорим об этом методе здесь более подробно.

Рассмотрим старую головоломку с тремя сосудами, восходящую еще к Никола Фонтана, итальянскому математику XVI века, которого друзья называли Тартальей \*). Восемилитровый сосуд до краев наполнен водой. С помощью двух пустых сосудов объемом 3 и 5 литров воду надо поровну разлить в два больших сосуда. Диаграмма для этой задачи — ромбический стол размером  $3 \times 5$  — изображена

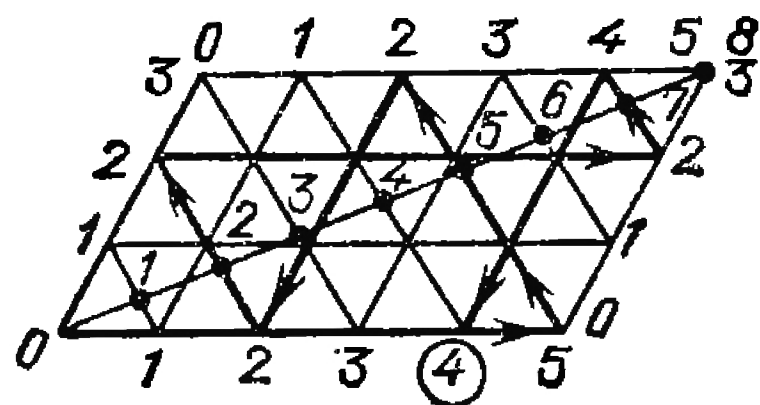


Рис. В.5

на рис. В.5. Главная диагональ ромба, поделенная наклонными прямыми на 8 частей, относится к 8-литровому сосуду.

Как и в предыдущей задаче, бильярдный шар начинает свое движение из точки 0. Нарисовать его траекторию совсем несложно. С ее помо-

щью вы получите решение в минимальном числе переливаний, равным 7.

Если объемы двух меньших сосудов не имеют общего делителя (т. е. взаимно просты), а объем третьего сосуда больше или равен сумме объемов двух меньших, то с помощью этих трех сосудов можно отмерить любое целое число литров, начиная с 1 литра и кончая объемом среднего сосуда

Имея, например, сосуды вместимостью 15, 16 и 31 литр, вы сумеете отмерить любое количество воды от 1 до 16 литров. Такая процедура невозможна, если объемы двух меньших сосудов имеют общий делитель (подумайте сами, почему). Когда объем большего сосуда меньше суммы объемов двух других, возникают новые ограничения. Если, например, объемы сосудов равны 7, 9 и 12 литрам, то у ромбического стола надо отсечь нижний правый угол (рис. В.6). Тогда шар сможет попасть в любую точку от 1 до 9, за исключением точки 6. Несмотря на то, что 7 и 9 взаимно просты, отмерить 6 литров воды оказывается невозможным из-за того, что самый большой сосуд имеет слишком маленький объем.

---

\*) Тарталья по-итальянски означает «зайка». Он родился в 1500 г. в итальянском городе Брекция. В 1512 г. во время взятия города французами Тарталья был ранен в нижнюю часть лица, что отразилось на его речи; товарищи прозвали его зайкой.

Исследование различных возможностей, возникающих при использовании сосудов разных объемов, с помощью метода «бильярдного шара» чрезвычайно увлекательно. Однако заниматься этими вопросами мы в этой книге не будем, оставив их на рассмотрение читателя. Отметим только, что обобщение указанного метода на случай четырех сосудов сводится к движению бильярдного шара в объемной (тетраэдрической) области.

Предлагаем читателю еще одну задачу на переливания.

**Задача.** Имеется 10-литровое ведро, доверху заполненное водой, и два пустых бидона объемом 3 и 5 литров. Требуется часть воды (целое число литров) вылить, а оставшуюся воду разделить на три равные части.

Рассмотрим другой тип элементарных геометрических задач, относящихся к бильярдам. В них либо требуется найти замкнутую траекторию бильярдного шара в данном многоугольнике, либо найти путь бильярдного шара, попадающего через заданное число ударов из одной фиксированной точки внутри многоугольника в другую.

Для решения таких задач существует очень удобный и важный метод «зеркального отражения», или «выпрямления» бильярдной траектории, принадлежащий немецкому математику Г. А. Шварцу \*) (о применении этого метода см. части II и IV). Метод этот является основным техническим приемом при решении бильярдных задач в многоугольных областях  $Q$  и послужит нам в дальнейшем ключом при нахождении и исследовании разнообразных бильярдных траекторий. Опишем его.

Сложное, вообще говоря, поведение бильярдной траектории в многоугольной области  $Q$  можно существенно упростить, представив его иначе. А именно, сядем на бильярдный шар  $O$ , как барон Карл Фридрих Иероним фон Мюнхгаузен на пушечное ядро, и вооружимся системой

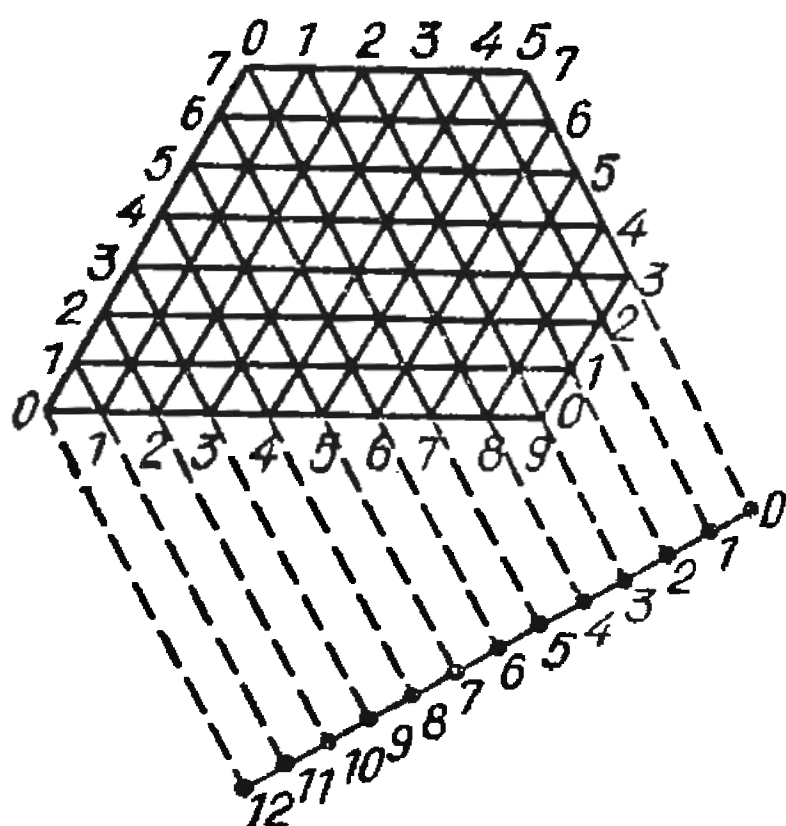


Рис. В.6

\*) *Герман Амандус Шварц* (1843—1921) — известный немецкий математик, специалист по математическому анализу и теории функций; имеет также крупные заслуги в областях, связанных с так называемой «изопериметрической проблемой».

координат, направив ось  $Oy$  по направлению движения, а ось  $Ox$  — вправо перпендикулярно оси  $Oy$ . В этой системе координат наша бильярдная траектория изобразится осью  $Oy$  (т. е. прямой линией), а область  $Q$  будет представляться нам как последовательность копий  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  этой области, «нанизанных» на ось  $Oy$  таким образом, что соседние копии  $Q_i$  и  $Q_{i+1}$  зеркально симметричны относительно их общей стороны. В этом построении, связанном с переходом к новой системе координат, и заключается метод выпрямления бильярдной траектории.

Совокупность копий  $\{Q_i\}$ , как бы нанизанных на «копье»  $Oy$ , образует «коридор»  $QQ_1Q_2Q_3 \dots$ . Возвращению из

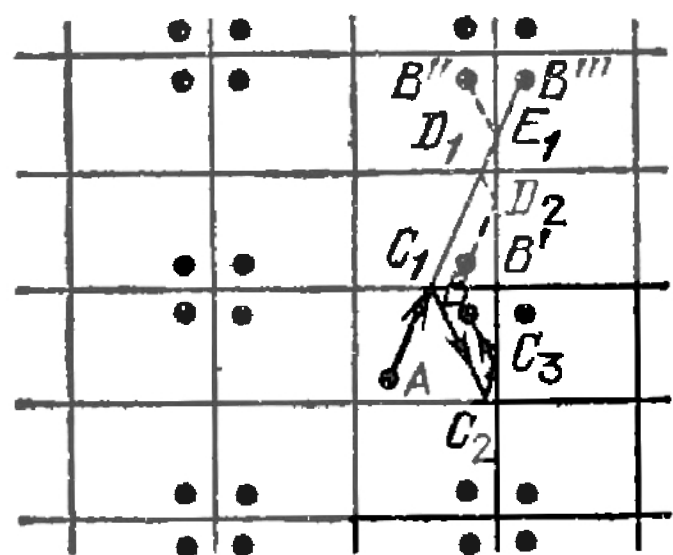


Рис. В.7

системы координат Мюнхгаузена в исходную, прикрепленную к фигуре  $Q$ , соответствует наложению «гармошкой» коридора  $QQ_1Q_2Q_3 \dots$  (который полезно считать прозрачным) на исходную фигуру  $Q$ ; при этом ось  $Oy$  переходит в рассматриваемую бильярдную траекторию.

Продemonстрируем метод выпрямления на следующих примерах.

А. Пусть на прямоугольном бильярдном столе находится один шар; под каким углом его следует направить из точки  $A$ , чтобы он после заданного числа отражений от бортов попал в точку  $B$  (например, в лузу)?

Для решения отразим прямоугольник (исходный бильярд) симметрично относительно всех его сторон; все полученные таким образом прямоугольники вновь отразим относительно всех их сторон, и так далее до бесконечности (на рис. В.7 показаны также образы точки  $B$  при этих симметриях). В результате всех сделанных отражений траектория шарика «распрямляется» (например, на рис. В.7 траектория  $AC_1C_2C_3B$  последовательно переходит в  $AC_1D_1D_2B'$ ,  $AC_1D_1E_1B''$ ,  $AC_1D_1E_1B'''$ ).

Если полученная «выпрямленная траектория» проходит через образ точки  $B$  в одном из прямоугольников, то, очевидно, траектория шара в исходном прямоугольнике пройдет через  $B$ . Поэтому, для того чтобы пустить шар из точки  $A$  так, чтобы он после заданного числа отражений о стенки прямоугольного бильярда попал в точку  $B$ , нужно провести такой отрезок с началом в точке  $A$  и концом в одном из образов точки  $B$ , чтобы он пересек это же самое



число раз линии сетки «клетчатой плоскости». Прделав обратную процедуру «свертывания» проведенного отрезка, превратим его в искомую траекторию в исходном бильярде (рис. В.7). Общая «теория прямоугольного бильярда» изложена в части II книги.

Б. Рассмотрим бильярд в равностороннем треугольнике. Поскольку одинаковыми равносторонними треугольниками можно без щелей и перекрытий замостить всю плоскость, и здесь применима процедура «выпрямления бильярдной траектории».

Оказывается, траектория бильярдного шара решает следующую известную задачу: *найти кратчайший путь, по которому должна ползти пчела из точки А в точку В внутри равностороннего треугольника, чтобы сначала насладиться медом на одной стороне*

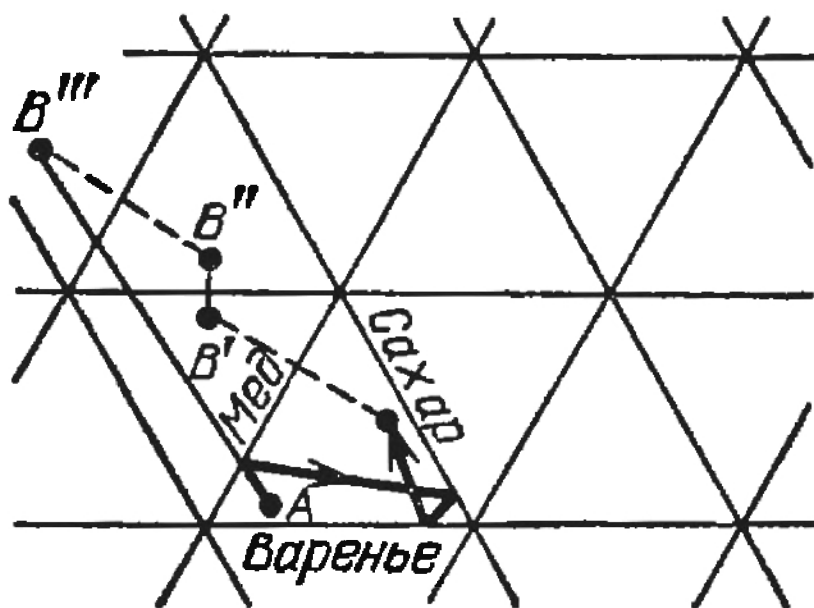


Рис. В.8

*треугольника, потом сахаром — на другой стороне, и, наконец, вареньем — на третьей.* (Предполагается, что каждая сторона полностью вымазана соответствующим сладким веществом.)

Ответ приведен на рис. В.8. Нетрудно видеть, что любой другой путь, ведущий требуемым образом от А к В, после зеркальных отражений превращается в путь из точки А в точку В'', длина которого больше длины отрезка АВ'', и поэтому не является кратчайшим.

В. Сразу же возникают два интересных вопроса, связанные с обобщением плоского бильярда на случай пространства: *существуют ли замкнутые бильярдные траектории внутри куба, являющегося пространственным аналогом квадрата, и тетраэдра — пространственного аналога равностороннего треугольника?*

Как и раньше, бильярдный шар считается идеальной упругой невесомой частицей, отражающейся от стенок по закону «угол падения равен углу отражения». Вместо шара можно рассматривать луч света, отражающийся от зеркальных стенок внутренней поверхности многогранника и не попадающий ни на ребра, ни в его вершины (в противном случае ответом на поставленный вопрос следовало бы считать любую из диагоналей, по которой из конца в конец двигался бы шар).

В одной из многочисленных статей о Льюисе Кэрролле \*) есть упоминание о бильярде внутри куба. Это одна из тех задач, которые не могли не привлечь внимания изобретателя круглого бильярдного стола. Идея об игре в бильярд внутри кубического «стола» далеко не столь надуманна, как это может показаться на первый взгляд. Дело в том, что реальные молекулы воздуха в кубической комнате как раз и представляют собой «бильярдные шары», сталкивающиеся друг с другом и со стенками комнаты по закону упругого удара. Правда, они находятся в поле тяжести и испытывают сопротивление воздуха. Если отбросить эти ограничения, то получим настоящий бильярд с огромным числом (порядка  $10^{23}$ ) шаров. Этому бильярду мы посвятим в нашей книге достаточно много места — практически всю часть III; с ним, кроме метода выпрямления бильярдной траектории, связано много разнообразных физических, геометрических и алгебраических идей, часть которых будет освещена ниже.

Но вернемся к движению одного шара в кубе и применим к кубу тот же метод «выпрямления траектории», что

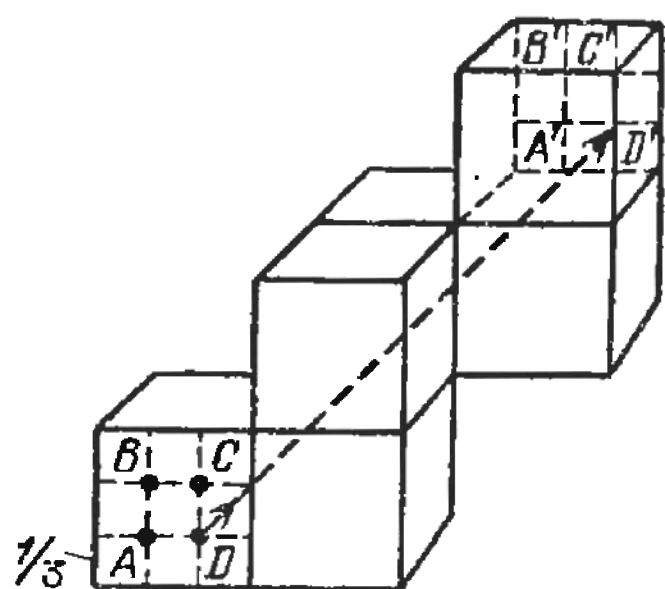


Рис. В.9

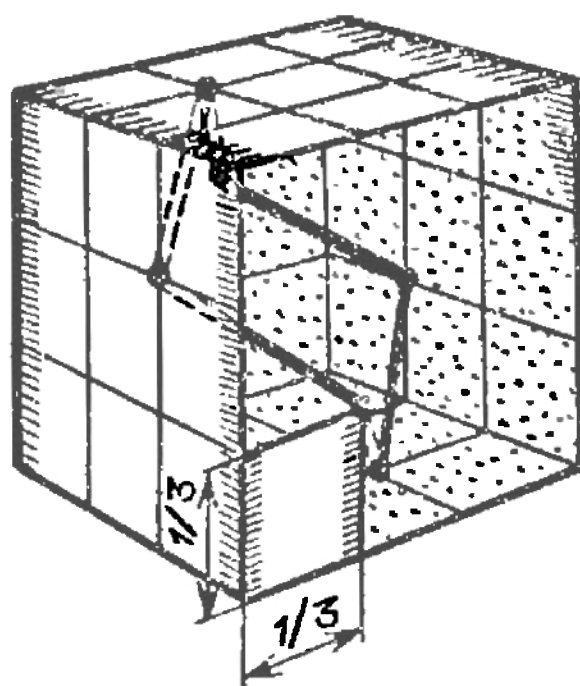


Рис. В.10

и для квадрата. Произведя 5 отражений от граней куба, мы получим искомую замкнутую траекторию, изображенную на рис. В.9 жирной штриховой линией со стрелкой и представляющую собой одну из четырех возможных тра-

\*) Льюис Кэрролл (псевдоним Чарлза Доджсона) (1832—1898), автор знаменитых книг про Алису, математик по профессии, преподаватель Оксфордского университета (Англия), увлекался и бильярдом. Он придумал круглый бильярдный стол и сочинил правила игры на этом столе (1890). О некоторых изобретениях Кэрролла рассказывает Мартин Гарднер в своих популярных книгах «Математические досуги», «Математические головоломки и развлечения», «Математические новеллы» и др.

екторий, каждая из которых является решением задачи. Если «свернуть» кубы, проделав обратные отражения, получим замкнутую бильярдную траекторию из 6 звеньев равной длины в исходном кубе. Представив себе куб размером  $1 \times 1 \times 1$ , состоящим из 27 маленьких кубиков с ребром  $1/3$  каждый, несложно понять, что каждое звено этой траектории является диагональю такого кубика (рис. В.10), так что его длина равна  $\sqrt{3}/3 = 1/\sqrt{3}$ , а длина всей траектории составляет  $6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ .

Эта траектория известна химикам-органикам как «шестиугольник в форме кресла». Она часто встречается в углеродных соединениях, например в циклогексане, где шесть углеродных атомов соединены одновалентными связями в кольцо, а атомы водорода располагаются вне этого кольца. Интересно отметить также, что если эту бильярдную траекторию спроектировать на любую грань куба, то в проекции получится прямоугольник размером  $1/3 \times 2/3$ , а если ее спроектировать на три плоскости, параллельные трем диагоналям, то получаются ромбы; еще в одной проекции (какой?) получается правильный шестиугольник.

Обращаясь теперь ко второму вопросу — о замкнутой бильярдной траектории в тетраэдре, — поступим точно

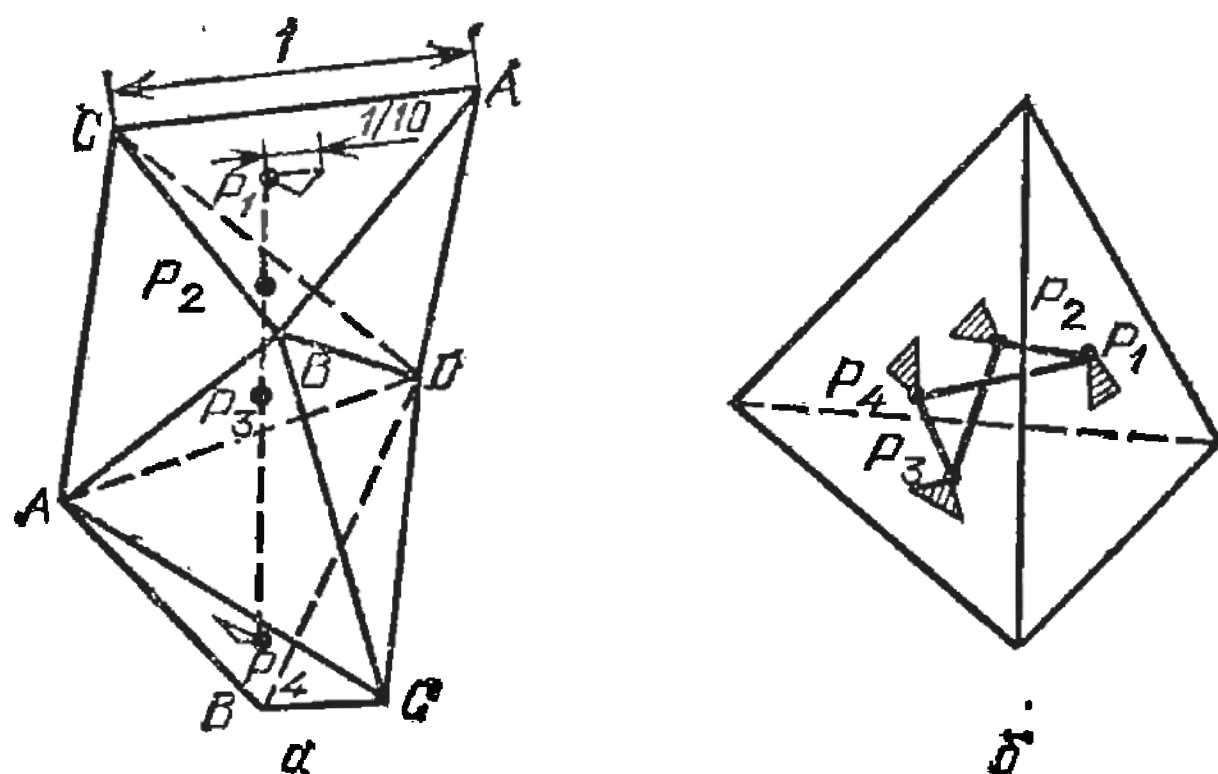


Рис. В.11

так же, как и в случае куба: отразив тетраэдр симметрично относительно трех его граней (рис. В.11), мы получим замкнутую траекторию из четырех звеньев, которая по одному разу касается каждой грани. Существенно сложнее решается задача о замкнутой бильярдной траектории, которая имеет все звенья равной длины. Одна такая траектория изображена на рис. В.11 штриховой линией, а всего их существует три, причем совершенно одинаковой формы.

Каждая из них имеет точки излома на гранях тетраэдра в одной из вершин маленького равностороннего треугольника, расположенного в центре грани. Стороны этого маленького треугольника равны  $1/10$  ребра исходного тетраэдра, а каждое звено траектории имеет длину  $1/\sqrt{10} \approx 0,3162777\dots$ , так что весь путь бильярдного шара внутри тетраэдра составляет в этом случае  $4 \cdot 1/\sqrt{10} \approx 1,2649\dots$ .

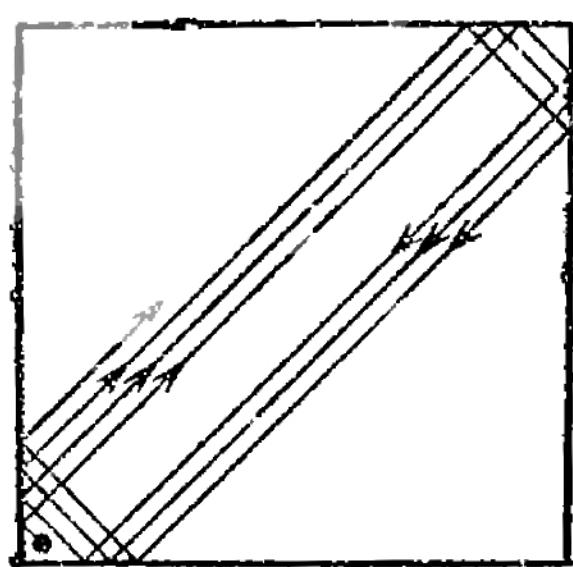
Метод зеркальных отражений, который мы продемонстрировали на примерах А — В, дает возможность не только строить разнообразные периодические бильярдные траектории в «хороших» многоугольниках (или многогранниках), но и отыскать критерий периодичности траекторий в таких областях, как прямоугольник или правильный треугольник. Скажем, для бильярда в квадрате неособая траектория, направленная под углом  $\alpha$  к стороне квадрата, окажется периодической в том и только в том случае, когда число  $k = \operatorname{tg} \alpha$  является *рациональным*, т. е. представимо в виде обыкновенной дроби  $m/n$  ( $m$  — целое,  $n$  — натуральное). А как же будут себя вести траектории, для которых число  $k = \operatorname{tg} \alpha$  *иррационально*? Например, если  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ ?

Примитивный ответ: эти траектории будут *непериодическими*, — говорит нам только о том, что движение будет каким-то «неправильным». Но «насколько неправильным»? Это очень интересный вопрос, но лишь в том случае, если на него дается содержательный ответ! А таких ответов может быть и несколько.

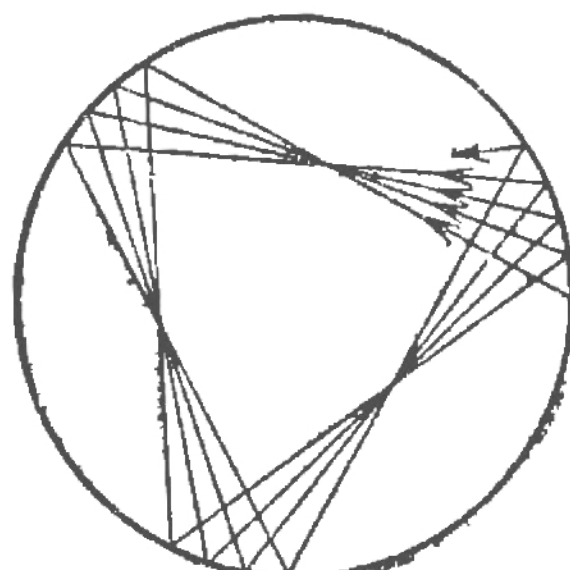
Во-первых, непериодическое движение может оказаться «почти периодическим», или *квазипериодическим*, как принято говорить в классической механике. Грубо говоря, квазипериодичность движения означает, что хотя его траектория и не замкнута, но через некоторое время (через квазипериод) она идет близко к предыдущему отрезку траектории. Характерные квазипериодические траектории бильярдов в квадрате и круге показаны на рис. В.12.

В о п р о с: *обязана ли непериодическая траектория быть квазипериодической?* Оказывается, для бильярда в круге, в прямоугольнике, в правильном треугольнике и во многих других многоугольниках действительно обязана. А вот в эллипсе существуют траектории, которые непериодичны и не квазипериодичны, но их, по сути, немного! (См. ниже § 4.) И опять-таки, в общем случае (для областей произвольного вида и даже для многоугольников) ответ на поставленный вопрос неизвестен.

Далее, если внимательно рассмотреть квазипериодические траектории на рис. В.12, становится понятным, что они «стараяются» все более плотно заполнить целую область: их близкие отрезки все сдвигаются и сдвигаются, так что траектория на рис. В.12, а заполняет «территорию» квадрата, а на рис. В.12, б — круговое кольцо. На сериях рис. В.13, а, б (полученных с помощью компьютера) показан процесс постепенного распределения траекторий по своим областям.



а



б

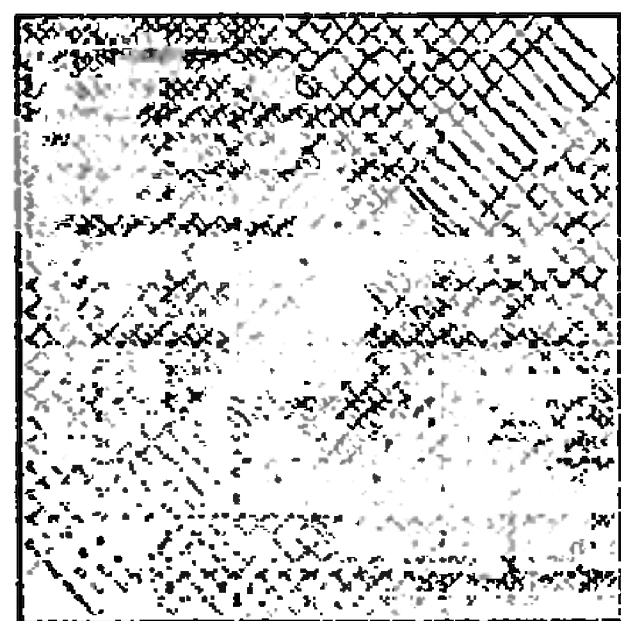
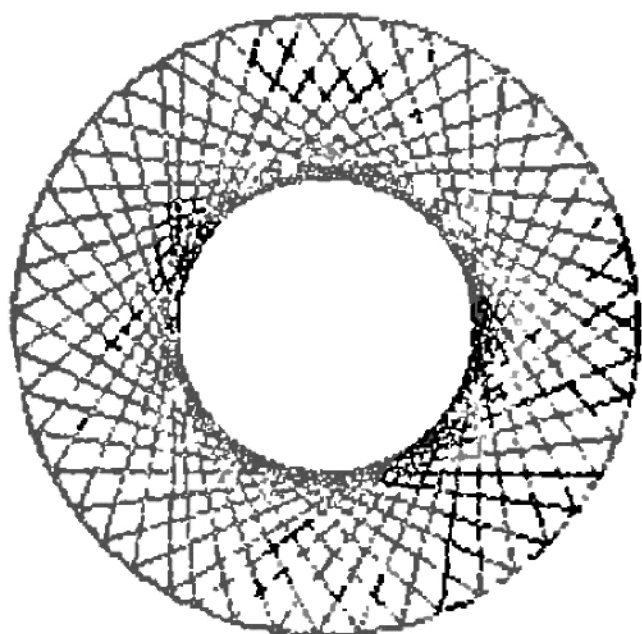
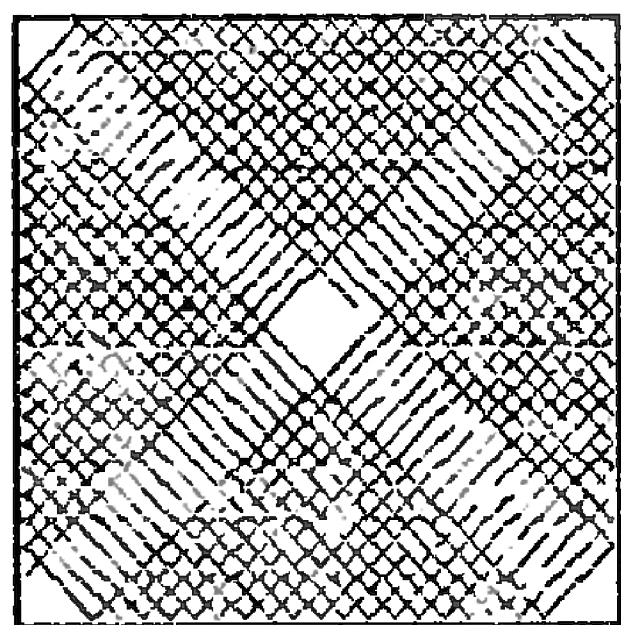
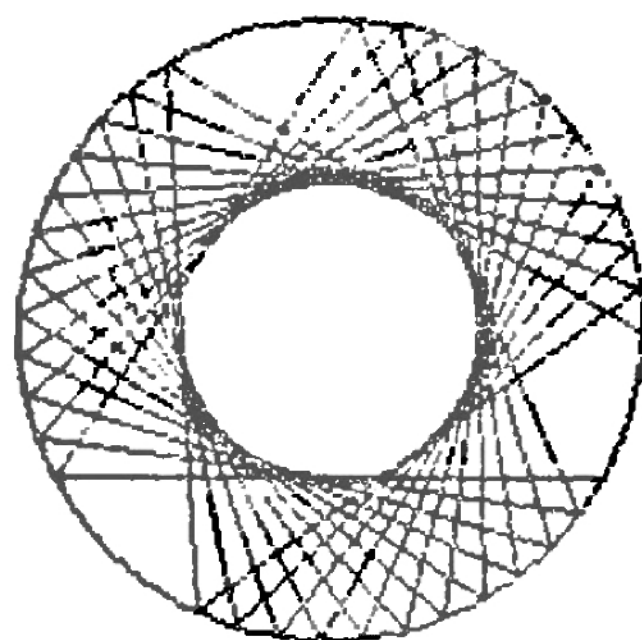
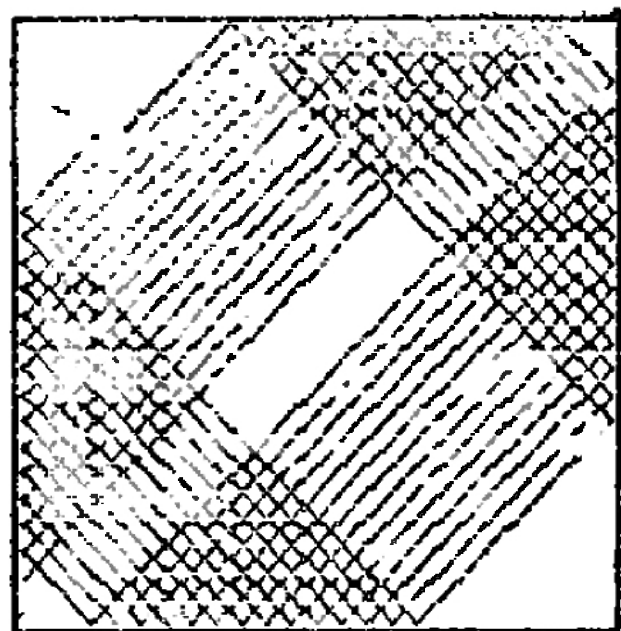
Рис. В.12

Возникает следующий вопрос: не будут ли эти траектории *всюду плотными* — в квадрате, в кольце? Иначе говоря, оставит ли такая траектория хотя бы какое-нибудь «пустое местечко» в области — например, кружок (хотя бы очень маленький), который она *ни когда* не пересечет? Оказывается, в данных случаях *не оставит!* Указанные непериодические траектории *всюду плотно* заполняют соответствующую область: какой бы (сколь угодно малый) кружок мы ни взяли (в квадрате или в кольце), *рано или поздно* траектория пересечет этот кружок. Если считать, что бильярдный шар «чернильный» и оставляет после себя след, то он со временем *обязательно закрасит всю область* (квадрат или кольцо) *целиком*, каким бы тонким не был чернильный след (но имеющим все-таки ненулевую толщину).

Ясно, что периодическая траектория свойством *всюду плотности* обладать не может — она может заполнить область «очень плотно», но не *всюду* плотно. *Обязана ли произвольная непериодическая траектория в области Q быть всюду плотной* во всей этой области? Это будет верно (что мы дальше докажем с помощью вполне элементарных рассуждений) для бильярда в прямоугольнике, в правильном треугольнике и некоторых других областях. Это не так для бильярда в круге и эллипсе и даже в некоторых многоуголь-



никах, что тоже будет нами показано (см. § 26). Наконец, для многоугольников (и просто для треугольников) общего вида вопрос остается открытым. Неизвестен пока ответ даже на более простой (казалось бы!) вопрос: в любом ли



*a*

*b*

Рис. В.13

*многоугольнике  $Q$  существует всюду плотная (в  $Q$ ) траектория?*

(Устройство всюду плотных множеств даже на числовой прямой  $\mathbb{R}$  может быть довольно сложным. Простейшие примеры таких множеств — множество всех рациональных

чисел  $Q$ , или всех конечных десятичных дробей  $Q_{10}$ , или множество всех иррациональных чисел  $\bar{Q}$ . Их всюду плотность почти очевидна: если взять на числовой прямой любой интервал  $\Delta$  сколь угодно малой длины  $\varepsilon > 0$ , то на нем найдутся числа всех трех указанных типов. Действительно, если взять число  $d$  положительное, но меньшее  $\varepsilon/2$ , то хотя бы одна из точек  $\pm d, \pm 2d, \pm 3d, \dots$  попадет в интервал  $\Delta$ . Осталось выбрать число  $d$  в виде соответствующей дроби:  $1/N$ , либо  $10^{-N}$ , либо  $\sqrt{2}/N$ , где  $N$  — натуральное.)

Дальнейшим усилением свойства всюду плотности бильярдных траекторий является свойство их *равномерной распределенности* в соответствующей области и более общее свойство *эргодичности*, играющее важную роль в математике, механике, в статистической физике. Объясним, в чем заключается общее свойство эргодичности бильярда в области  $Q$ .

Если бильiardная траектория всюду плотна в области  $Q$ , т. е. бильiardный шар рано или поздно обязательно попадает в любую заданную фигуру  $\Phi$ , лежащую в  $Q$ , то можно заняться вопросом: *какую долю времени шар проводит в фигуре  $\Phi$ ?* Имеется в виду, что сначала мы вычисляем долю времени за фиксированный промежуток  $T$  (т. е. вычисляем отношение  $\lambda(T) = t/T$ , где  $t$  — время, в течение которого за промежуток  $T$  шарик побывал в области  $\Phi$ ), а затем устремляем  $T$  к бесконечности и берем предел  $\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda(T)$ .

Если окажется, что *указанная доля времени, которую проводит шарик в фигуре  $\Phi$ , пропорциональна площади фигуры  $\Phi$*  (или, что то же самое, пропорциональна отношению площади фигуры  $\Phi$  к площади области  $Q$ ), и это верно для «типичной» траектории, то говорят, что данная бильiardная система *эргодична* \*). Отношение  $t/T$  (вернее, его предел при  $T \rightarrow \infty$ ) называется «временным средним», а отношение площади фигуры  $\Phi$  к площади области  $Q$  — «пространственным средним». Поэтому эргодичность системы формулируется еще и как возможность заменять вре-

---

\*) Строго говоря, эргодичность означает, что почти каждая фазовая кривая проводит в измеримой области *фазового пространства* (см. § 3) время, пропорциональное объему этой области. Свойство, о котором говорится в тексте, можно называть «слабой эргодичностью». Термин «типичная траектория» здесь не обсуждается, его следует понимать в интуитивном смысле. (Для сравнения: «типичные» числа на отрезке  $[0, 1]$  иррациональные, а рациональные числа — «исключительные».)

менные средние пространственными средними. Траектория в эргодической системе заполняет область *всюду* *плотно* и *равномерно*, т. е. «размазана» по области с равной «плотностью». Свойство *эргодичности* сильнее свойства *всюду плотности*, поскольку подразумевает его выполнение; таким образом, из эргодичности системы следует *всюду* плотность типичной траектории, но не наоборот, хотя очень часто оказывается, что если какая-то траектория *всюду* плотна, то и вся система эргодична.

Изучению эргодических свойств динамических систем посвящен целый раздел современной математики — так называемая эргодическая теория, изучающая «хаотические» свойства динамических систем, в которую теория бильярдов входит в качестве подраздела. Предмет настоящей книги также относится к этой теории.

**Структура книги.** Изложение материала в книге ведется последовательными переходами от простых бильярдных систем к более сложным. Трудные места в книге (иногда это касается целых параграфов и глав) отмечены одной или двумя (это зависит от сложности) звездочками; при желании их можно пропустить.

В **части I** книги изучаются *выпуклые* бильярды, границы которых не содержат прямолинейных участков: круглый, эллиптический и произвольный бильярд с криволинейной границей. Наряду с их исследованием демонстрируются общие математические методы, позволяющие применять бильярд в этих областях к решению некоторых теоретико-числовых, геометрических и физических задач.

В **части II** проведено полное исследование бильярда в *прямоугольнике*, сводящееся к исследованию траекторий равномерно движущейся по тору (поверхности бублика) точки, и показана связь между бильярдными траекториями в прямоугольнике и фигурами Лиссажу на осциллографе.

Исследованию «газа шаров» — упруго сталкивающихся твердых шаров в пространстве и сосуде — посвящена **часть III**. Интересными здесь являются геометрические методы решения задач о росте числа столкновений молекул, расположенных на прямой, плоскости, в пространстве и в ограниченных областях («сосудах»), сводящие рассмотрение системы шаров к бильярдам специального вида.

Следующая часть книги — **часть IV** — рассказывает о бильярдах в *многоугольниках* с произвольным числом сторон. Оказывается, что, как и в случае прямоугольника, бильярды в многоугольниках специального вида (в «рациональных» многоугольниках, все углы которых соизме-

римы с  $\pi$ ) сводятся к изучению непрерывных траекторий на замкнутых ограниченных поверхностях — так называемых «кренделях» или «сферах с ручками» (см. рисунок на третьей странице обложки). Отдельно изучаются некоторые классы периодических траекторий в тупоугольных треугольниках.

Наконец, в заключении читатель сможет «с высоты птичьего полета» обозреть целые классы бильярдов, которые в зависимости от области, в которой движется бильярдный шар, носят названия *рассеивающих* (бильярдов *Синая*), *фокусирующих* и *осциллирующих*. В каждом классе бильярдов наблюдается свой тип поведения траекторий, но все эти бильярды являются моделями реальных физических систем, в которых движение неотлично от случайного, т. е. является хотя и однозначно определенным (детерминированным), но крайне нерегулярным и непредсказуемым. Модели, демонстрирующие подобное поведение, обнаружены практически во всех разделах физики и число их непрерывно растет. Изложение этого материала книги ведется на обзорном уровне.

## БИЛЬЯРДЫ В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

### Г л а в а I

#### БИЛЬЯРД В КРУГЕ

Простейшая ограниченная выпуклая область с криволинейной границей на плоскости — круг. С исследования траекторий шара в круглом бильярде мы и начнем наш рассказ о бильярдах в выпуклых областях с криволинейной границей.

Во введении ставилась общая проблема бильярда в произвольной области  $Q$ . Естественно ожидать, что для простейшей области  $Q$  — *круга* — точных ответов на поставленные во введении вопросы должно быть больше, чем для более сложных областей, а сами ответы должны быть более простыми и окончательными, чем в других случаях. Иными словами, естественно ожидать, что проблема бильярда в круге поддается полному исследованию. Так оно и оказывается. Более того, приводимые в этой главе рассуждения и теоремы являются фундаментом для всех последующих рассуждений и результатов.

#### § 1. Шар в круглом бильярде без луз

Рассмотрим шар в круге  $Q$ , ограниченном окружностью  $\Gamma$ . Его траекториями являются вписанные в  $\Gamma$  ломаные  $P_0P_1P_2P_3P_4 \dots$ , обладающие свойством равенства в точках  $P_1, P_2, P_3, \dots$  углов падения и отражения, отсчитываемых от касательных или от радиусов  $OP_1, OP_2, \dots$  (рис. 1.1,  $a$ ). Отметим, что из этого свойства следует, *во-первых*, что все звенья траектории равны между собой:

$$P_0P_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = \dots,$$

и *во-вторых*, что равны опирающиеся на них центральные углы:

$$\angle P_0OP_1 = \angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \dots$$



Действительно, для любого  $k=1, 2, 3, \dots$  равны треугольники  $P_{k-1}OP_k$  и  $P_kOP_{k+1}$ , как равнобедренные с равными углами при основаниях (рис. 1.1, б), откуда и вытекают указанные равенства хорд и центральных углов.

Нетрудно видеть также, что середины  $\{K_i\}$  всех звеньев траектории удалены от центра круга на *одинаковое* расстояние (почему?) и, таким образом, расположены на окружности с тем же центром  $O$ . Следовательно, вся бильярдная траектория расположена в круговом кольце (рис. 1.1, в)

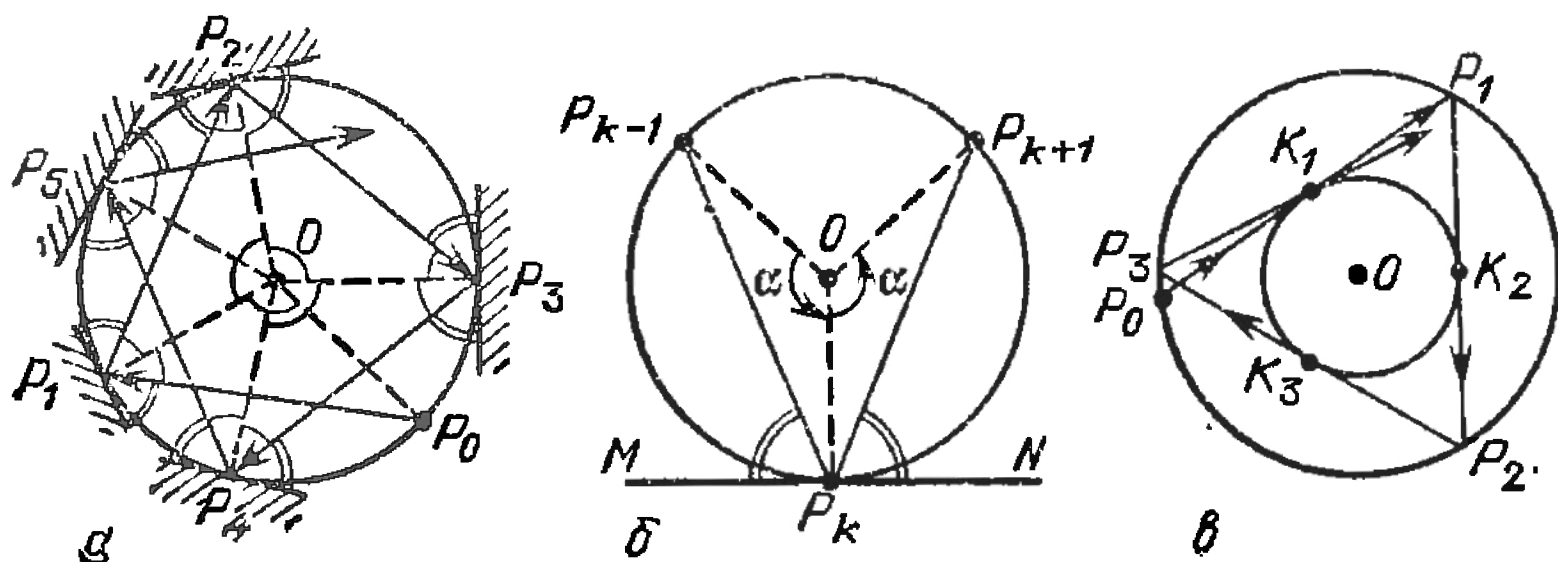


Рис. 1.1

Это позволяет очень просто строить все звенья бильярдной траектории по какому-то одному из них — для этого достаточно провести concentрическую с исходной окружность  $\gamma$  радиуса  $OK$ , где  $K$  — середина данного звена, затем из концов этого звена провести касательные к окружности  $\gamma$  до пересечения с внешней окружностью  $\Gamma$ , затем из концов построенных хорд — опять касательные к окружности  $\gamma$  до пересечения с  $\Gamma$ , и так далее — это и будут звенья искомой бильярдной траектории.

Таким образом, мы установили важное свойство: *любая бильярдная траектория в круге никогда не заходит внутрь некоторого concentрического круга, границы которого касаются все ее звенья.* Отсюда следует, что

*бильярд в круге не эргодичен,*

поскольку эргодичность означает, как сформулировано во введении, не только прохождение шара через любой маленький кружок внутри области  $Q$  в какой-то момент времени, но и, в частности, пребывание в нем за большой промежуток времени  $T$  доли времени, равной в пределе (когда  $T$  устремляется к бесконечности) отношению площади этого кружка к площади всей области  $Q$ ; для круга же не выполнено даже первое из этих условий, которое носит название

«сюду плотности бильярдной траектории. Поэтому

*бильярдная траектория в круге не всюду плотна в нем.*

Теперь не менее мы можем выяснить не только указанные факты отрицательного, так сказать, свойства, но и полностью решить проблему бильярда в круге: дать критерий, позволяющий выделять *периодические* траектории и изучать характер поведения *непериодических* траекторий.

Для этого обозначим через  $\alpha$  радианную меру углов  $\angle P_0OP_1$ ,  $\angle P_1OP_2$ ,  $\dots$ . Ясно, что каждая вершина  $P_k$  траектории  $P_0P_1P_2P_3\dots$  получается из предыдущей вершины  $P_{k-1}$  поворотом на угол  $\alpha$  относительно центра  $O$  окружности  $\Gamma$ , откуда следует, что вершина  $P_n$  получается из начальной вершины  $P_0$  поворотом на угол  $n\alpha$ . Докажем, что вид бильярдной траектории в круге полностью определяется числом  $\alpha$ . А именно:

(а) если число  $\alpha$  соизмеримо с  $\pi$ , т. е. дробь  $\alpha/\pi$  является рациональным числом (равным некоторой дроби  $m/n$  с целыми  $m$  и  $n$ ), то бильярдная траектория периодична;

(б) если  $\alpha$  и  $\pi$  несоизмеримы, т. е. число  $\alpha/\pi$  иррационально, то отвечающая углу  $\alpha$  траектория непериодична.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** (а) Если  $\alpha$  соизмеримо с  $\pi$ , то его можно представить в виде  $\alpha = \frac{m}{n} \cdot 2\pi$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа. Тогда  $n\alpha = 2\pi m$ , и поэтому при повороте на угол  $n\alpha$  каждая точка окружности  $\Gamma$  переходит в себя. В частности, все вершины рассматриваемой бильярдной траектории  $P_0P_1P_2P_3\dots$  обладают тем свойством, что

$$P_n = P_0, P_{n+1} = P_1, P_{n+2} = P_2, \dots,$$

т. е. вершины, начиная с  $n$ -й, повторяются. Это и означает, что бильярдная траектория периодична, и утверждение пункта (а) доказано.

Сколько же звеньев будет содержать рассматриваемая траектория  $P_0P_1P_2\dots$ ? Если  $\frac{m}{n} = \frac{\alpha}{2\pi}$  — несократимая дробь, то отвечающая  $\alpha$  периодическая траектория — это траектория  $P_0P_1\dots P_{n-1}P_0$ , где  $n$  — знаменатель указанной дроби, и состоит она ровно из  $n$  звеньев. При  $m=1$  это будет правильный  $n$ -угольник, вписанный в окружность  $\Gamma$  (рис. 1.2, а), а при  $m \geq 2$  бильярдная траектория представляет собой правильную самопересекающуюся замкнутую (звездчатую) ломаную, вписанную в  $\Gamma$  (рис. 1.2, б).

Иными словами, бильярдный шар после  $n$  отражений от борта  $\Gamma$  оказывается в исходной точке  $P_0$ , сделав  $m$  оборо-

тов вокруг центра  $O$  (т. е. повернувшись вокруг центра на угол  $2\pi m$ ).

(б) Предположим, что бильiardная траектория и в этом случае периодична. Докажем тогда, что  $\alpha$  и  $\pi$  соизмеримы, что противоречит условию пункта (б) и тем самым доказывает его утверждение.

Из периодичности траектории вытекает, что, начиная с некоторого номера  $n$ , вершины траектории повторяются:  $P_n = P_0$ ,  $P_{n+1} = P_1$ ,  $P_{n+2} = P_2$ , и т. д. Но это означает, что при повороте на  $n\alpha$  радиан точка  $P_0$  переходит сама в себя;

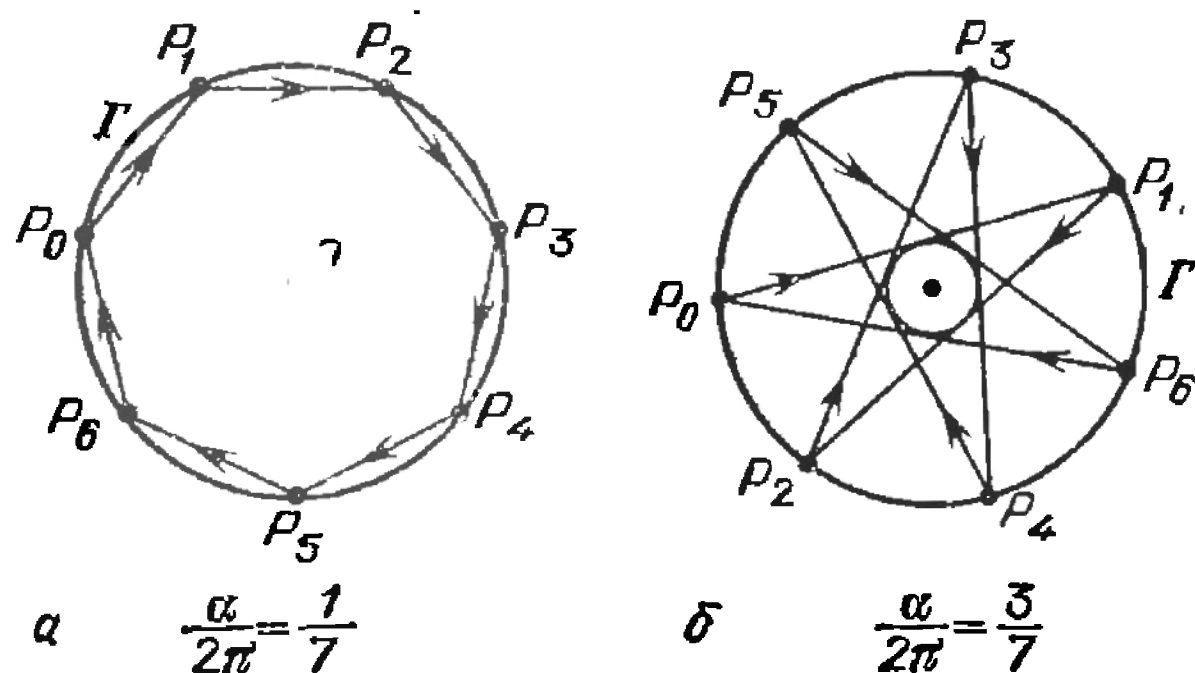


Рис. 1.2

следовательно,  $n\alpha$  есть целое кратное полного угла:  $n\alpha = 2\pi m$ . Отсюда  $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{2m}{n}$  — рациональное число.

Искомое противоречие получено.

Про периодические траектории в круге мы уже выяснили все досконально в пункте (а) приведенного доказательства. Доказательство же пункта (б) велось от противного и поэтому качественное поведение непериодических траекторий нам пока неизвестно. Однако интуитивно ясно, что непериодическая бильiardная траектория должна вести себя, в отличие от периодической, неким «нерегулярным» способом.

Эту «нерегулярность» можно себе представить, например, так. Будем считать, что бильiardный шар при движении оставляет «чернильный след» ненулевой «толщины». Если шар описывает периодическую траекторию, то, хотя она может быть очень «звездчатой» (см. п. (а)), и заполнять кольцо  $K$  между внешней и внутренней окружностями  $\Gamma$  и  $\gamma$  «очень плотно», но все-таки не «всюду плотно» — на кольце обязательно останутся такие участки (например, маленькие

кружки), которые периодическая траектория никогда не пересечет (рис. 1.3).

**Задача.** Укажите неточность на рис. 1.3.

**Указание.** Траектория бильярдного шара не может пересекать маленький кружок так, как на рис. 1.3, — показанное стрелкой звено не касается внутренней окружности кольца.

Иное дело, когда шарик описывает не периодическую траекторию. В этом случае он рано или поздно побывает в любом кусочке кольца  $K$ . Другими слова-

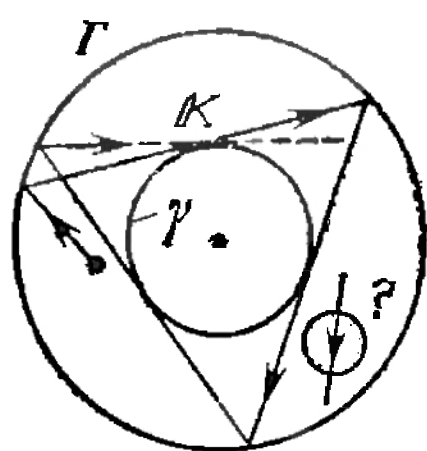


Рис. 1.3

ми, каким бы тонким ни был чернильный след, оставляемый бильярдным шаром (но имеющим все-таки ненулевую толщину), он со временем обязательно закрасит все кольцо  $K$  целиком (рис. 1.4). Это и означает нерегулярность, а на математическом языке — «всюду плотность» бильярдной траектории в кольце  $K$ . (Вспомним, что в начале параграфа мы выяснили, что никакая бильярдная траектория в круге  $Q$  не всюду плотна в нем, т. е. чернильный след шара не может закрасить всего круга; однако для кольца  $K$  такая возможность логически ничему не противоречит.)

Оказывается, непериодическая траектория в круге  $Q$  действительно всюду плотна в кольце  $K$  с границей  $\Gamma \cup \gamma$ !

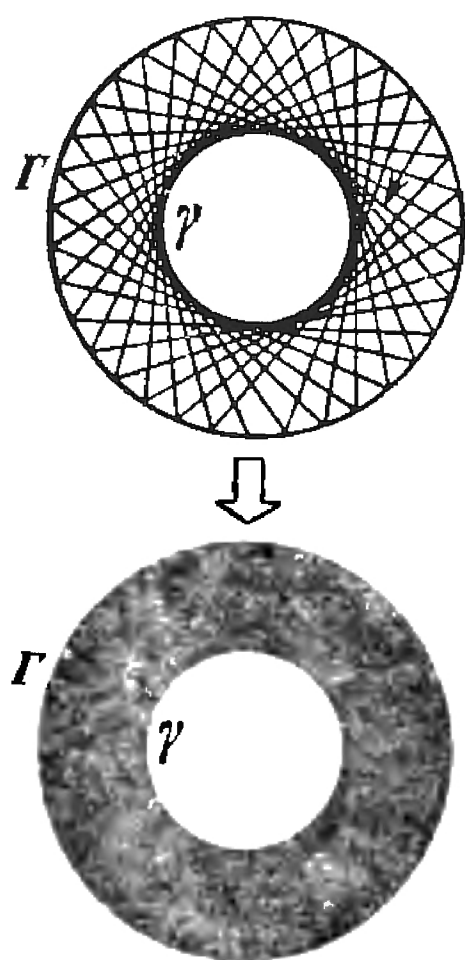


Рис. 1.4

Это утверждение мы еще раз сформулируем уже в виде математической теоремы в § 2 и там же полностью докажем. А пока отметим, что утверждение о всюду плотности бильярдной траектории в кольце будет вытекать из того факта, что точки отражения шара от борта  $P_0, P_1, P_2, \dots$  расположены на окружности  $\Gamma$  всюду плотно, т. е. внутри любой дуги  $\Delta$  окружности  $\Gamma$  имеется хотя бы одна точка  $P_k$ . Это последнее утверждение носит название «теоремы Якоби» \*). Оно также будет доказано в § 2. Отметим здесь только, что теорема Якоби является основным инструментом при доказательстве почти всех дальнейших теорем, связанных с «всюду плотностью» бильярдных траекторий.

\*) К. Г. Я. Якоби (1804—1851) — крупнейший немецкий математик, известный своими исследованиями в теории чисел, в механике и в других областях науки.

После всего сказанного бильярд в круге можно считать полностью исследованным. Резюмируем полученные результаты в виде теоремы.

**Т е о р е м а 1.** *Траектория бильярда в круге является либо периодической, если число  $\alpha/\pi$  рационально, либо всюду плотной в кольце  $K$  между бортом  $\Gamma$  и concentрической с  $\Gamma$  окружностью  $\gamma$ , если число  $\alpha/\pi$  иррационально.*

**З а д а ч а 1.1.** Бильярдный шар находится на круглом столе радиуса  $R=1$  на расстоянии  $l$  от его центра. Установите характер бильярдной траектории (периодическая она или нет, какую область всюду плотно закрывает), если шарик выпущен под углом  $\varphi$  к диаметру, на котором он находится (рис. 1.5).

**О т в е т.** Периодична, если число  $\frac{1}{\pi} \arccos(l \sin \varphi)$  рационально, и всюду плотно заполняет кольцо с внутренним радиусом  $l \sin \varphi$  в противном случае.

**З а д а ч а 1.2.** Исследуйте бильярд а) в полукруге (рис. 1.6); б) в четвертькруге (рис. 1.7). **У к а з а н и е.** Попробуйте свести а и бильярды к бильярду в круге.

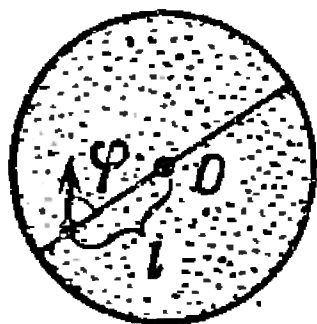


Рис. 1.5

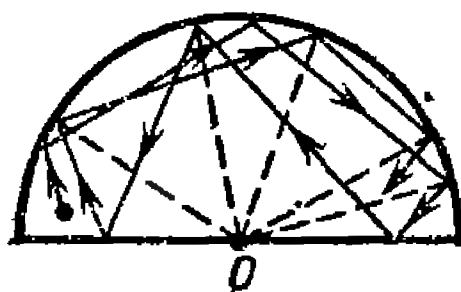


Рис. 1.6

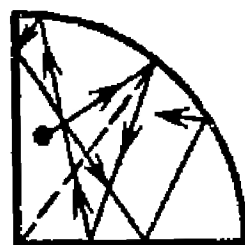


Рис. 1.7

**З а д а ч а 1.3.** Исследуйте бильярд а) в круговом concentрическом кольце; б) в круговом секторе угловой величины  $\alpha$ ; в) \* в криволинейном четырехугольнике, который высекается из кольца сектором угловой величины  $\alpha$ .

**З а д а ч а 1.4.** а) Докажите, что никакая непериодическая бильярдная траектория в круге не содержит двух параллельных звеньев.

б) Может ли у периодической бильярдной траектории в круге, какие-то два звена которой параллельны друг другу, быть 1717 звеньев? 1718 звеньев? А если она самопересекающаяся? Если может, укажите способ построения всех периодических траекторий с таким числом звеньев и найдите максимальную длину траектории из этого класса (принимая радиус круга за 1).

в) Обобщите вопрос пункта б) на произвольное число звеньев  $n$  (см. также задачу 6.6 из § 6).

**Р е ш е н и е.** а) Если какие-то два звена  $AB$  и  $CD$  траектории параллельны, то они центрально-симметричны относительно центра круга  $O$ . Поэтому и вся траектория центрально-симметрична относительно  $O$  (рис. 1.8). Значит, если шар перешел со звена  $AB$  на звено  $CD$  после  $n$  отражений, то еще через  $n$  отражений он вернется на звено  $AB$ , и вся траектория замкнется — траектория окажется периодической.

Поэтому, если заранее выбрать радиус  $r$  внутренней окружности  $\gamma$  кольца  $K$  (радиус внешней равен 1) и провести к  $\gamma$  две

параллельные касательные, то они заведомо не будут звеньями одной траектории, если только число  $\arccos r$  несоизмеримо с  $\pi$ ,

б), в). Если бильярдная траектория периодическая и содержит два параллельных звена, то все звенья разбиваются на пары параллельных (рис. 1.8), так что число звеньев  $n$  в этом случае обязательно *четно*. Итак, 1717 звеньев быть не может. 1718 звеньев у траектории быть может — например, у правильного вписанного 1718-угольника  $P$ . Остальные бильярдные траектории с изломами в вершинах многоугольника  $P$  получатся, если соединять эти вершины через одну, через две, через три и т. д. Однако  $1718 = 2 \cdot 859$  (859 — простое число), поэтому, соединяя вершины через одну, получим два 859-угольника без общих вершин. Аналогична ситуация, когда соединяются вершины через 3 (на четвертую), через 5 (на 6-ю) и т. д. — получается несколько замкнутых

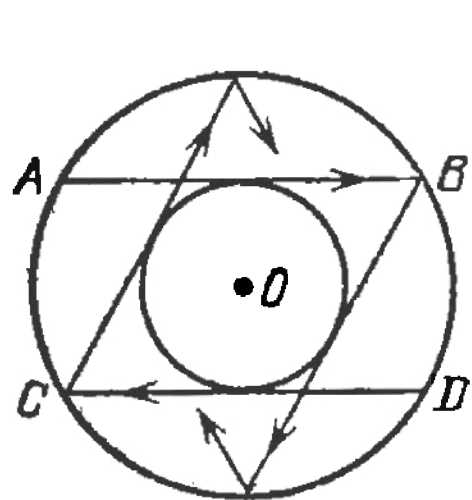


Рис. 1.8

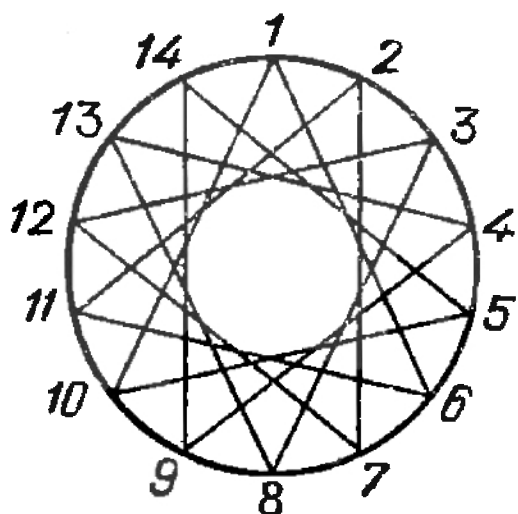


Рис. 1.9

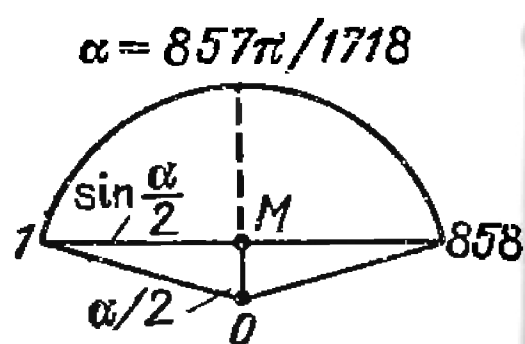


Рис. 1.10

ломаных. Если же соединять вершины через  $k-1$  на  $k$ -ю, где  $k$  взаимно просто с 1718 (т. е. вершину 1 соединить с  $(k+1)$ -й, 2-ю — с  $(k+2)$ -й и т. д.), то полученные замкнутые бильярдные ломаные будут содержать ровно 1718 звеньев, причем все звенья будут разбиты на 859 пар попарно параллельных (см. рис. 1.9, на котором изображена траектория из  $14 = 2 \cdot 7$  звеньев). Наибольшей длины звенья будут у траектории, соединяющей вершины 1 и 858, 2 и 859, 3 и 860 и т. д. Из треугольника  $\triangle IMO$  на рис. 1.10 следует, что длина звена (1; 858) равна

$$l = 2 \sin(\alpha/2) = 2 \sin(857\pi/3436).$$

Поскольку угол, стоящий под знаком синуса, равен примерно  $\pi/4$ , имеем  $l \approx 2 \sin(\pi/4) = \sqrt{2}$ , поэтому максимальная длина бильярдной траектории из 1718 звеньев равна

$$L = 1718l = 3436 \sin(857\pi/3436) \approx 3436\sqrt{2} \approx 4851,632.$$

Шар при ее обходе сделает 857 оборотов.

**Задача 1.5.** В круглом бильярде в некотором месте сделана луза — кружок радиуса  $\epsilon$ , не содержащий центра круга. Доказать, что точечный бильярдный шар можно расположить в такой точке круга и запустить в таком направлении с единичной скоростью, что он а) не попадет в лузу никогда; б) попадет в лузу, пройдя до попадания путь длины, большей заданной величины  $L$ .

Останется ли верным это утверждение, если шарик расположен в заранее заданной точке круга? А если точку его расположения можно выбрать, а направление вектора скорости фиксированно?



**Задача 1.6.** В круглом бильярде в заданных  $n$  точках расположены точечные бильярдные шары. Доказать, что их можно запустить в таких направлениях, что а) никакие два из них никогда не столкнутся, б) любые два из них столкнутся (сталкивающиеся шарики проходят друг сквозь друга без отклонений).

**Задача 1.7.** Доказать, что два заданных шара радиуса 0,0001 можно запустить в круглом бильярде радиуса 1 в таких направлениях, что они обязательно столкнутся друг с другом, но не раньше, чем каждый из них пройдет путь заданной длины  $L$ .

**Задача 1.8.** Можно ли запустить два шара радиуса  $10^{-10}$  в круглом бильярде радиуса 1 так, чтобы они никогда не столкнулись?

**Задача 1.9.** Предположим, что бильярдная траектория в круге всюду плотно заполняет кольцо  $K$ . Верно ли, что любой фиксированный кружок внутри кольца пересекают бесконечно много звеньев этой бильярдной траектории? А верно ли, что через какую-то точку этого кружка не проходит ни одно звено траектории?

**Задача 1.10\*.** Верно ли, что доля времени, проводимая бильярдным шаром в кружке из задачи 1.9, равна (в пределе) отношению площади этого кружка к площади кольца  $K$ ?

## § 2. Теорема Якоби.

### Применение к теории чисел

В этом параграфе мы докажем теорему, сформулированную в конце § 1. Сформулируем ее здесь еще раз (мы приводим более трудную часть теоремы).

**Теорема 1.** *Если  $\alpha$  и  $\pi$  несоизмеримы (т. е. число  $\alpha/\pi$  иррационально), то любая траектория бильярда в круге, отвечающая углу  $\alpha$  (т. е. каждое звено которой видно из центра круга под углом  $\alpha$ ; рис. 1.1, б), всюду плотно заполняет кольцо  $K$ .*

Доказательство теоремы 1 опирается на следующую основную теорему этого параграфа, в дальнейшем применяемую в качестве основного рабочего инструмента при доказательстве утверждений, иногда имеющих мало общего с бильярдными задачами, например утверждений из теории чисел (об этом см. ниже).

**Теорема Якоби.** *Пусть  $\alpha$  — несоизмеримое с  $\pi$  число,  $\{P_0, P_1, P_2, \dots\} = \{P_k\}$  — бесконечная последовательность точек окружности  $\Gamma$  такая, что каждая следующая точка последовательности  $P_{k+1}$  получается из предыдущей точки  $P_k$  поворотом около центра на  $\alpha$  радиан. Тогда для любой дуги  $\Delta$  окружности  $\Gamma$  хотя бы одна точка последовательности  $\{P_k\}$  лежит на этой дуге.*

**Задача.** Докажите, что на дуге  $\Delta$  находятся бесконечно много точек последовательности  $\{P_k\}$ .

**Решение.** Если бы на дуге  $\Delta$  располагалось только конечное число точек (например, как крайний случай, только одна точка), то нашлась бы некоторая дуга  $\Delta'$ , лежащая внутри дуги  $\Delta$  и не содержащая ни одной точки последовательности  $\{P_k\}$ . Это противоречит теореме Якоби: по этой теореме на дуге  $\Delta'$  имеется хотя бы одна точка последовательности.

Прежде чем доказывать теоремы Якоби, выведем из нее теорему 1.

**Доказательство теоремы 1.** Пусть  $\alpha$  — несоизмеримое с  $\pi$  число,  $\gamma$  — окружность, которой касаются все звенья каждой отвечающей углу  $\alpha$  бильярдной траектории внутри окружности  $\Gamma$ . Пусть  $K$  — кольцо между  $\gamma$  и  $\Gamma$ , а  $D$  — произвольный кружок внутри кольца  $K$ . Проведем через центр кружка  $D$  хорду  $MN$  окружности  $\Gamma$ , касающуюся окружности  $\gamma$  (рис. 2.1). Если провести касательные к кружку  $D$ , касающиеся окружности  $\gamma$ , то они высекут на окружности  $\Gamma$  некоторую дугу  $\Delta$ , в которой расположена точка  $M$ . Очевидно, что для любой другой точки  $M'$  дуги  $\Delta$  касательная, проведенная из нее к окружности  $\gamma$  по ту же сторону, что и хорда  $MN$ , пересечет кружок  $D$ .

Рассмотрим теперь любую бильярдную непериодическую траекторию  $P_0P_1P_2\ldots$ , отвечающую углу  $\alpha$ . Требуется доказать, что хотя бы одно из ее звеньев пересекает кружок  $D$ .

Согласно теореме Якоби, точки  $P_0, P_1, P_2, \ldots$  всюду плотно заполняют окружность  $\Gamma$ . Следовательно, хотя бы одна из них, скажем  $P_n$ , лежит на построенной выше дуге  $\Delta$ . В силу выбора этой дуги одно из двух звеньев траектории, выходящей из точки  $P_n$  (а, тем самым, касательных к окружности  $\gamma$ ), пересекает кружок  $D$  (в качестве точки  $M'$  на рис. 2.1 следует взять точку  $P_n$ ). Тем самым теорема 1 доказана.

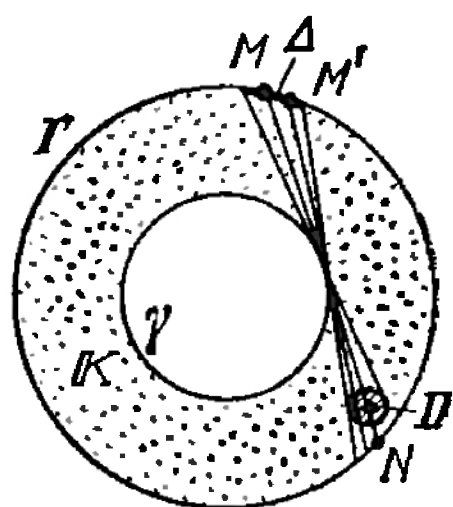


Рис. 2.1

**Доказательство теоремы Якоби.** Двигаясь от точки  $P_0$  последовательными дуговыми шагами величиной  $\alpha$  каждый (рис. 2.2) и попадая в точки  $P_1, P_2, P_3, \ldots$ , остановимся в точке  $P_n$ , как только в первые перескочим точку  $P_0$  (дуга  $P_0P_{n-1}$  меньше  $2\pi$ , а дуга  $P_0P_n$  больше  $2\pi$ ). Обозначим точку  $P_0$  буквой  $A$ , а ближайшую к ней из точек  $P_{n-1}$  (до перескока) и  $P_n$  (после перескока) — буквой  $B$ . Тогда  $\beta$  — длина дуги  $AB$  — не больше  $\alpha/2$ .  
 $\beta \leq \alpha/2$ .

Начав двигаться от точки  $B$  прыжками величиной  $\alpha$ , мы через некоторое число шагов попадем в точку, отстоящую от точки  $B$  на  $\beta$ , затем на  $2\beta$ , потом на  $3\beta$ , и т. д. (рис. 2.2).

Можно считать, что у нас сжался масштаб длины и мы движемся по окружности  $\Gamma$  дугowymi шагами уже величиной  $\beta$ , по крайней мере вдвое меньшими, чем величина шага  $\alpha$  при начальном движении от точки  $A$ .

После определенного числа шагов величиной  $\beta$  каждый, мы впервые перескочим точку  $B$  и выберем после этого ближайшую к ней (из двух точек — до перескока и после него) точку  $C$ . Пусть длина дуги  $BC$  равна  $\varphi$ , тогда  $\varphi \leq \beta/2 \leq \alpha/4$ . Как и выше, получим, что можно опять изменить масштаб длины и считать теперь величину прыжка равной  $\varphi$ .

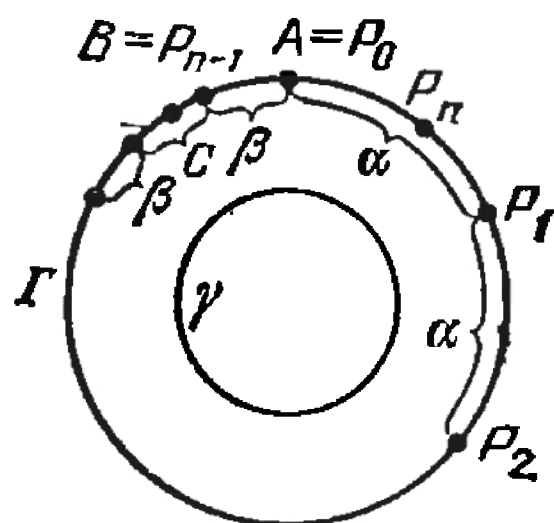


Рис. 2.2

Повторяя описанный процесс  $k$  раз, получим величину прыжка, не бóльшую чем  $\alpha/2^k$ . Но при больших  $k$  величина  $\alpha/2^k$  стремится к нулю, т. е. становится меньшей произвольного числа  $\varepsilon > 0$ , так что мы попадем в любую, сколь угодно малую дугу  $\Delta$ , произвольно выбранную на окружности  $\Gamma$ . Теорема Якоби доказана.

Для любителей формальных доказательств описанное рассуждение проведем более техническим способом.

Пусть  $\Delta$  — произвольная дуга на окружности  $\Gamma$ ,  $\varepsilon$  — ее радианная мера. Выберем такое натуральное число  $N$ , что  $\frac{2\pi}{N} < \varepsilon$ . Разобьем окружность  $\Gamma$  на  $N$  равных по длине дуг  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ ; радианная мера каждой из них равна  $2\pi/N$  и меньше  $\varepsilon$ .

Рассмотрим теперь  $N+1$  первых точек последовательности  $\{P_k\}$ , т. е. точки  $P_0, P_1, \dots, P_N$ . Согласно принципу Дирихле\*), хотя бы на одной из  $N$  дуг  $\Delta_1, \dots, \Delta_N$  лежит по крайней мере две из этих точек; допустим, точки  $P_n$  и  $P_m$  лежат на дуге  $\Delta_i$  (считаем  $m = n + l > n$ ). Пусть длина дуги  $P_n P_m$  (в радианах) равна  $\delta$ , тогда  $\delta < |\Delta_i| = \frac{2\pi}{N} < \varepsilon$ .

Рассмотрим далее точки последовательности  $\{P_k\}$  с номерами  $n, m = n + l, n + 2l, n + 3l, \dots$ , т. е. точки  $P_n, P_{n+l}, P_{n+2l}, \dots$ , каждая из которых получается из предыдущей поворотом на угол  $l\alpha$  — точно так же, как точка  $P_{n+l}$  получается из точки  $P_n$ . Таким

\*) Принцип Дирихле состоит в следующем: если в  $k$  ящиках лежит  $k+1$  предмет, то хотя бы в одном ящике больше одного предмета.

образом, соседние точки выделенной последовательности отстоят друг от друга на дугу радианной меры  $\delta$ . Так как  $\delta < \varepsilon$ , то хотя бы одна из точек  $P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, \dots$  обязана попасть на дугу  $\Delta$ . Тем самым теорема Якоби доказана.

**З а д а ч а.** Где в доказательстве теоремы Якоби использовалась несоизмеримость чисел  $\alpha$  и  $\pi$ ? (Если  $\alpha$  и  $\pi$  соизмеримы, то теорема, очевидно, неверна).

**О т в е т.** Из несоизмеримости следует утверждение, что точки  $A, B, C, \dots$  различны (в доказательстве петитом — различны точки  $P_n$  и  $P_{n+1}$ ).

Кроме теоремы 1, теорема Якоби имеет и много других интересных следствий.

Одной из важных проблем теории чисел является задача о распределении дробных долей разных функций, в частности многочленов. Задача о распределении дробных долей многочленов связана с оценками числа решений диофантовых уравнений (уравнений с целыми коэффициентами, для которых ищутся целочисленные решения) в алгебраической теории чисел.

Рассмотрим многочлен  $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ . При каждом конкретном значении  $x$  можно вычислить число  $y$ ; при нецелых коэффициентах многочлена оно, как правило, будет *нецелым*. Вычтя из него его *целую часть*, т. е. *наибольшее* целое число  $[y]$ , не превосходящее  $y$ , получим *дробную часть* числа  $y$ , которая обозначается фигурными скобками:  $\{y\} = y - [y]$ . Ясно, что всегда  $0 \leq \{y\} < 1$ , так что при каждом  $x$  число  $\{y\}$  принадлежит полуинтервалу  $[0, 1)$ .

*Как распределены числа  $\{y_k\}$  на полуинтервале  $[0, 1)$ , когда  $x$  пробегает все целые числа  $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ?*

Это и есть задача о распределении дробных долей многочленов. Теорема Якоби позволяет частично решить эту задачу для *линейных* многочленов, т. е. многочленов первой степени.

**У т в е р ж д е н и е 1.** Дробные части чисел  $y_k = ak + b$ , когда  $k$  пробегает все целые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ , либо образуют *конечное* множество точек на полуинтервале  $[0, 1)$ , либо *всюду плотное* множество точек на этом интервале. Первый случай реализуется при рациональном, а второй — при иррациональном числе  $a$  (число  $b$  при этом может быть произвольным).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Искривим полуинтервал  $[0, 1)$ , на котором расположены дробные части  $\{y_k\}$ , так, чтобы его концы совпали, и, склеив их, получим окружность единичной длины  $S^1$  (рис. 2.3). Затем сделаем второй шаг: на-

мотаем всю числовую ось  $\mathbb{R}$  на полученную окружность так, чтобы точка  $b$  оси  $\mathbb{R}$  совпала со склеенными точками 0 и 1 окружности (рис. 2.4).

Тогда все точки  $ak+b$  отпечатаются на окружности  $S^1$ ; «выпрямив» эту окружность в исходный полуинтервал  $[0, 1)$ , мы получим на нем все дробные части чисел  $y_k = ak + b$ .

Однако на окружности  $S^1$  отпечатки всех точек  $y_k$  получаются из отпечатка точки  $y_0 = b$  поворотом на углы  $ka$  радиан, где  $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . Поэтому, если число  $a$  рационально, то отпечатков на  $S^1$  будет конечное число; если же  $a$  иррационально, то их будет бесконечно много и располагаться они на окружности будут, по теореме Якоби, всюду плотно, а это и требовалось доказать. Утверждение 1 доказано.

Для многочленов бóльших степеней, чем 1, решение задачи о распределении дробных долей существенно усложняется, хотя с наглядно-геометрических позиций все дело фактически также сводится к применению теоремы Якоби,

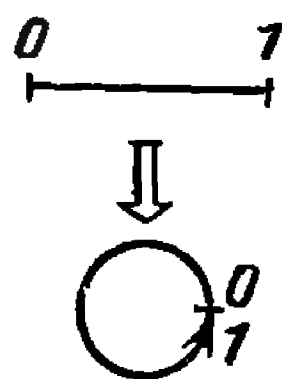


Рис. 2.3

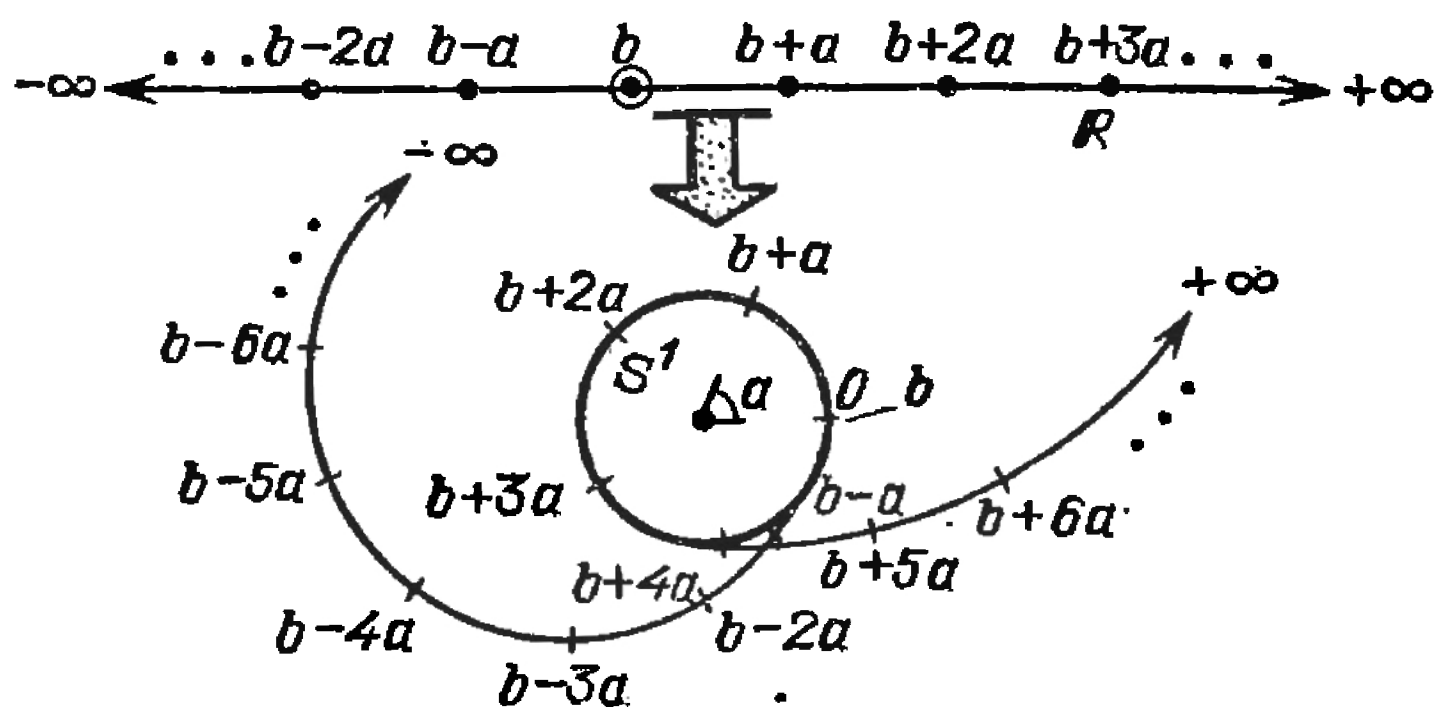


Рис. 2.4

только не для окружности, а для тора (см. § 8). Но об этом мы поговорим чуть позже — в гл. 3, когда речь пойдет о бильярде в прямоугольнике. Отметим пока только, насколько тесно взаимосвязаны разные разделы математики: от геометрических задач — бильярдов в круге — мы перешли к задаче из совсем другого раздела математики — теории чисел, а позже перейдем к бильярдам в других областях, исследование которых поможет при решении совсем новых задач из других областей математики. Собственно говоря, одной из целей нашей книги является попытка на

конкретном наглядном геометрическом материале дать почувствовать читателю многообразие математики и ее единство.

Вернемся, однако, к вопросу о распределении дробных долей многочленов. Полный ответ на него был получен в виде теоремы выдающимся математиком XX века Германом Вейлем. Прежде чем сформулировать эту теорему, приведем одно важное определение.

**О п р е д е л е н и е.** Произвольная бесконечная последовательность точек  $\{P_n\}$  на единичной окружности  $S^1$  (или на отрезке  $[0, 1]$ ) называется *равномерно распределенной* на  $S^1$  (на  $[0, 1]$ ), если для любой ее дуги (интервала)  $\Delta$  «доля» попавших на нее точек равна длине этой дуги (интервала)  $l(\Delta)$ .

Иными словами, если ограничиться лишь **к о н е ч н ы м** числом  $n$  точек  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ , то отношение числа  $k(n)$  точек, попавших в дугу  $\Delta$ , к общему числу точек  $n$ , т. е. их доля  $k(n)/n$  на окружности длины 1, будет мало отличаться от длины дуги  $l(\Delta)$ . Это отличие будет тем меньше, чем бóльшее число точек мы рассматриваем, и в пределе при  $n \rightarrow \infty$  величины  $k(n)/n$  и  $l(\Delta)$  совпадут. Сказанное можно выразить формулой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = l(\Delta). \quad (1)$$

Свойство равномерной распределенности — асимптотическое.

Можно доказать следующее утверждение.

**Т е о р е м а о равномерном распределении точек на окружности.** *Последовательность точек  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$  на окружности  $S^1$ , полученных каждая из предыдущей поворотом на иррациональный (несоизмеримый с  $2\pi$ ) угол  $\alpha$ , равномерно распределена на  $S^1$ .*

Формально строгого доказательства этой теоремы мы здесь не будем приводить; опишем лишь правдоподобные рассуждения, которые при желании можно довести до строгого доказательства. При доказательстве теоремы Якоби мы пользовались тем обстоятельством, что сначала производились прыжки одинаковой величины  $\alpha$ , затем (после изменения масштаба длины) — прыжки одной и той же величины  $\beta \leq \alpha/2$ , затем все прыжки становились равными  $\gamma \leq \alpha/4$ , и т. д. Итак, при каждой замене масштаба прыжки имеют **о д н у и т у ж е в е л и ч и н у**, которая меньше величины прыжка при предыдущей замене масштаба в 2 или



большее число раз. Равенство длин этих прыжков и их экспоненциальное убывание \*) при каждой замене масштаба означает, что число точек, попавших в данный интервал  $\Delta$ , пропорционально его длине — это выполнено тем точнее, чем больше сделано замен масштабов длины. Но это и означает равномерность распределения.

**З а д а ч а.** Доказать, что из равномерной распределенности последовательности точек  $\{P_k\}$  на окружности  $S^1$  вытекает всюду плотность их расположения на  $S^1$ .

**Р е ш е н и е.** Действительно, на любой дуге  $\Delta$  имеется хотя бы одна точка  $P_k$ .

**Теорема Г. Вейля** о дробных долях многочленов формулируется так.

**Т е о р е м а В е й л я.** Если среди коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  многочлена  $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  хотя бы один — число иррациональное, то последовательность  $\{y_k\}$ , где  $y_k = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n$ , равномерно распределена на полуинтервале  $[0, 1)$ .

Теория равномерного распределения была создана Г. Вейлем в 1916 году. Она появилась на стыке нескольких математических дисциплин (действительный и комплексный анализ, теория чисел, теория вероятностей и др.) и долгое время ее приложения ограничивались различными вопросами «чистой» математики и механики. Вычислительная математика заинтересовалась равномерно распределенными последовательностями в 50-х годах, после возникновения методов Монте-Карло, когда оказалось, что точки таких последовательностей могут в некоторых случаях играть роль квазислучайных чисел.

Классическое направление теории равномерного распределения связано с изучением дробных долей различных функций (например, многочленов; см. выше), оценками тригонометрических сумм и следующим известным критерием Вейля, связанным с эргодичностью.

**К р и т е р и й В е й л я.** Для того чтобы последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  была равномерно распределена на отрезке  $[0, 1]$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой интегрируемой (по Риману) функции  $f(x)$  выполнялось соотношение: «среднее временное равно среднему пространственному», т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_0^1 f(x) dx. \quad (2)$$

\*) Члены геометрической прогрессии  $a_k = a_0 q^k$  со знаменателем  $q$ , по модулю меньшим 1, образуют экспоненциально стремящуюся к 0 последовательность.

На первый взгляд требования (1) и (2) кажутся различными. Чтобы показать связь между ними, выберем произвольный интервал  $\Delta = (a, b)$  на отрезке  $[0, 1]$  и рассмотрим функцию  $f_{\Delta}(x)$ , называемую обычно *характеристической функцией*, или *индикатором* интервала  $\Delta$ : она тождественно равна 1 на интервале  $\Delta$  и тождественно равна 0 вне его (рис. 2.5). Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_{\Delta}(x_k) = f_{\Delta}(x_0) + f_{\Delta}(x_1) + \dots + f_{\Delta}(x_{n-1})$$

есть число точек, попавших в интервал  $\Delta$ , т. е. число  $k(n)$  из формулы (1), а

$$\int_0^1 f_{\Delta}(x) dx = \int_0^a f_{\Delta}(x) dx + \int_a^b f_{\Delta}(x) dx + \int_b^1 f_{\Delta}(x) dx = \int_a^b dx = b - a = l(\Delta),$$

поэтому при  $f = f_{\Delta}(x)$  соотношения (2) и (1) совпадают.

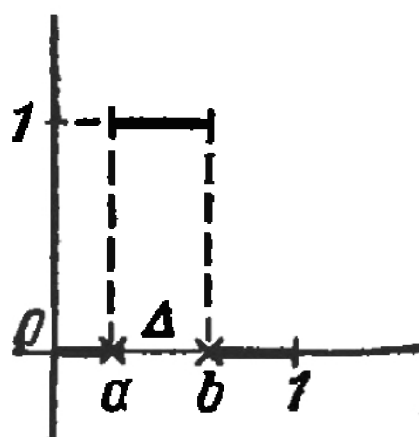


Рис. 2.5

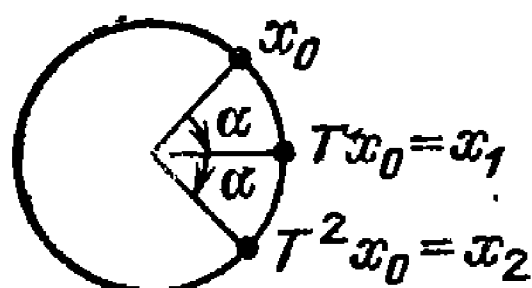


Рис. 2.6

Совпадение временного среднего и пространственного среднего для простейшего случая равномерно распределенной последовательности точек обобщается в теории динамических систем на случай так называемых эргодических систем. В эргодической системе действует преобразование  $T$ , не переводящее в себя никакого подмножества системы с мерой, отличной от 0 или 1, т. е. из равенства  $T(A) = A$ , где  $A$  — подмножество системы, следует, что мера множества  $A$  (длина, площадь, объем  $A$  в одно-, двух- и трехмерном случаях) равна либо 0, либо 1. Примером эргодической системы может служить окружность  $S^1$ , на которой действует преобразование поворота  $T$  на иррациональный угол  $\alpha$  (рис. 2.6). Для этой системы выполнено равенство (2), поэтому последовательность точек

$$x_0, T x_0 = x_1, T^2 x_0 = T(T x_0) = T x_1 = x_2, \dots$$

(так называемая «орбита преобразования  $T$ ») равномерно распределена на окружности, а стало быть, всюду плотно ее заполняет.

Именно равенство (2) и утверждает, что доля времени, которую частица (скачущая по окружности точка) прово-

дит в заданной области (дуге  $\Delta$ ), равно мере (длине) этой области.

Обсуждение вопросов, связанных с эргодичностью, равномерной распределенностью и всюду плотностью, закончим в этом параграфе следующей замечательной арифметической задачей, решаемой бильярдным шаром в круге.

**З а д а ч а.** Рассмотрим последовательные степени двойки: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, . . . и выпишем подряд первые цифры полученных чисел:

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, . . .

а) Встретится ли в этой последовательности цифра 7?

б) Какая цифра встречается в последовательности чаще: 7 или 8? Во сколько раз?

в) Вообще, с любого ли набора цифр может начинаться степень двойки? С какой частотой появляется заданный набор цифр  $\overline{a_1 a_2 \dots a_r}$ ?

**Р е ш е н и е.** Начнем решать задачу «с конца», т. е. ответим сначала на вопрос в), который естественным образом обобщает вопросы а) и б).

Пусть  $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_r}$  —  $r$ -значное число. Если  $2^n$  начинается с набора  $A$ , то  $2^n = \overline{A \dots}$ , а так как число  $\overline{A \dots}$  не меньше  $A \cdot 10^k$  и строго меньше  $(A+1) \cdot 10^k$ , где  $k$  — число цифр, приписанных справа к  $A$ , то

$$A \cdot 10^k \leq 2^n < (A+1) \cdot 10^k.$$

Логарифмируя по основанию 10, получаем

$$k + \lg A \leq n \lg 2 < k + \lg(A+1),$$

$$k \leq n \lg 2 - \lg A < k + \lg(A+1) - \lg A = k + \lg\left(1 + \frac{1}{A}\right).$$

Отметим на числовой оси все промежутки между числами  $k$  и  $k + \lg\left(1 + \frac{1}{A}\right)$ , т. е. окружим все целые точки  $k$  числовой оси полуинтервалами одинаковой длины  $\lg\left(1 + \frac{1}{A}\right)$ .

Возьмем теперь круглый бильярд, длина окружности которого равна 1 (т. е. радиус бильярдного круга равен  $1/(2\pi)$ ), и, как при доказательстве утверждения 1, намотаем числовую ось на границу этого бильярда — окружность  $S^1$  (рис. 2.7). Тогда все целые точки  $0, 1, 2, \dots, k, \dots$  сольются в одну точку на окружности, а все промежутки  $\left[k, k + \lg\left(1 + \frac{1}{A}\right)\right]$  — в одну дугу  $\Delta$  (с концом 0, который

ей принадлежит) длины  $l(\Delta) = \lg\left(1 + \frac{1}{A}\right)$ . Обозначим  $P_0$  точку на окружности, в которую попадает при этой намотке число  $(-\lg A)$ .

А теперь задача сводится к моделированию первых цифр последовательности  $2^n$  следующим движением бильярдного шара в круге: запускаем шар из точки  $P_0$  в точку  $P_1$  на окружности такую, что  $\sphericalangle P_1 P_2 = \lg 2$ , и рассматриваем всю

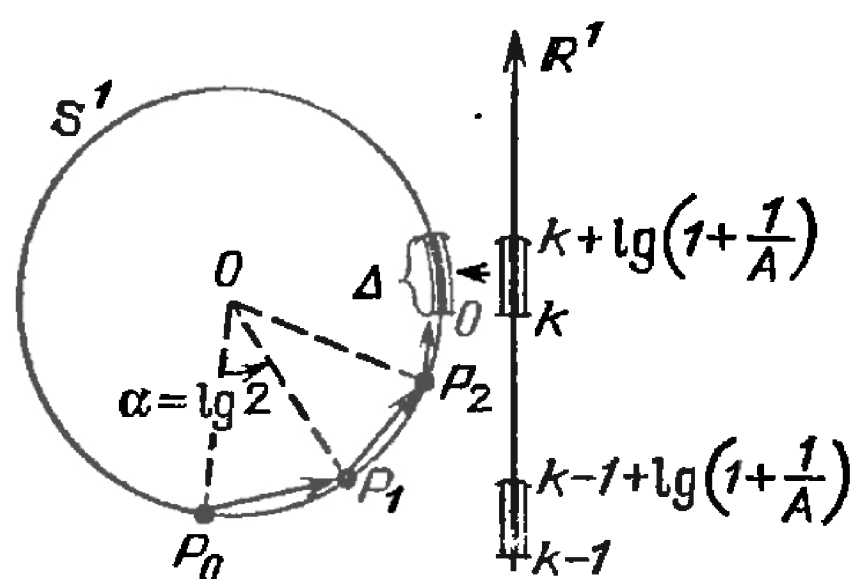


Рис. 2.7

последовательность  $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$  точек отражения шарика от борта; те  $n$ , для которых точки  $P_n$  принадлежат дуге  $\Delta$ , являются искомыми показателями двойки — для них числа  $2^n$  начинаются с набора  $\overline{a_1 a_2 \dots a_r}$ .

Но число  $\alpha = \lg 2$  — иррациональное \*), поэто-

му последовательность точек  $P_0, P_1, P_2, \dots$ , получающихся друг из друга поворотом на угол  $\alpha$ , по теореме Якоби заполняет окружность всюду плотно. Следовательно, степень двойки может начинаться с произвольного набора цифр  $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_r}$ . Более того, поскольку последовательность точек  $P_0, P_1, P_2, \dots$  равномерно распределена на окружности, доля тех чисел  $n$ , для которых  $2^n$  начинается с набора  $A$ , в пределе равна длине интервала  $\Delta$ , т. е. равна  $\lg\left(1 + \frac{1}{A}\right)$ . Это и есть частота появления набора  $\overline{a_1 a_2 \dots a_r}$  в качестве первых цифр чисел  $2^n$ .

После сказанного ответить на вопросы а) и б) не представляет труда. Цифра 7 в последовательности первых цифр чисел  $2^n$  обязательно встретится. Встречается она с частотой, равной  $\lg(1 + 1/7) = \lg 8 - \lg 7$ . Цифра 8 в этой последовательности встречается с частотой  $\lg(1 + 1/8) = \lg 9 - \lg 8$ . Так как  $8/7 > 9/8$ , то (как это ни странно на первый взгляд — особенно после рассмотрения начала последовательности, указанной в условии задачи), *семерки встречаются чаще восьмерок, причем в  $\frac{\lg 8 - \lg 7}{\lg 9 - \lg 8} \approx 1,14$  раз. А то, что вначале восьмерки встречаются все же чаще семерок, связано со*

\*) Если  $\lg 2 = m/n$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа, то  $2 = 10^{m/n}$ , и тогда  $2^n = 10^m$ , чего быть не может, так как  $2^n$  не может оканчиваться нулем ( $n > 0$ ).

следующим обстоятельством: иррациональное число  $\lg 2$  примерно равно рациональному числу  $3/10$ . Действительно, сделав на окружности 10 прыжков длины  $\lg 2$ , мы сдвинемся на дугу  $10 \lg 2 \approx 3$ , т. е. окажемся примерно в начальной точке. Среди первых 10 степеней двойки нет ни одной, начинающейся с 7 (это экспериментальный факт), а начинающиеся с 8 — есть, поэтому и среди следующих 10 степеней двойки опять нет ни одной, начинающейся с 7 (а с 8 — есть) и т. д.; это будет происходить до тех пор, пока  $10n \cdot \lg 2$  не станет уже существенно отличаться от целого числа — тогда и появляется семерка.

В заключение отметим, что числа  $3^n$ ,  $4^n = 2^{2n}$ ,  $5^n$ ,  $6^n$ ,  $7^n$ ,  $8^n$ ,  $9^n$ ,  $11^n$ ,  $12^n$ ,  $13^n$  и т. д. (пропускаются степени, основания которых кратны 10) также чаще начинается с 7, чем с 8, причем, как и для  $2^n$ , чаще в  $\lambda = \frac{\lg(8/7)}{\lg(9/8)}$  раз. Это объясняется равномерностью распределения точек на окружности длины 1 при отражении бильярдного шара с углами поворота  $\alpha = \lg 3, \lg 4, \lg 5, \lg 6, \dots$ , являющимися иррациональными числами.

**Задача 2.1.** Промоделируйте бильярдом в круге все степени числа 3, начинающиеся с набора цифр 1989.

**Задача 2.2.** Докажите, что если число  $p$  не является степенью 10, то среди чисел  $p, p^2, p^3, p^4, \dots$  найдутся такие, десятичная запись которых начинается с любой наперед заданной комбинации цифр. С какой цифры чаще начинаются эти числа — с 7 или 8 и во сколько раз? Сравните полученный ответ с ответом для  $p=2$  и объясните полученный результат.

**Задача 2.3.** Существует ли такое натуральное  $n$ , что  $\sin n < 10^{-100}$ ?

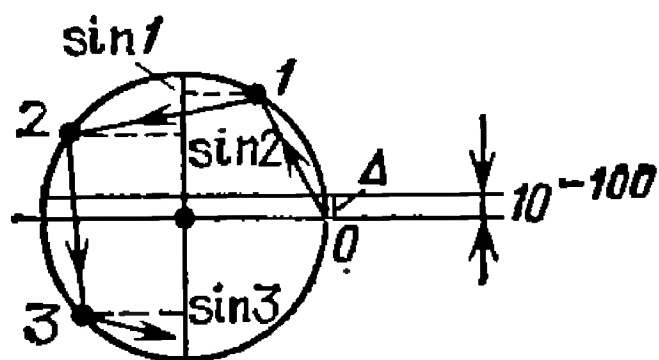


Рис. 2.8

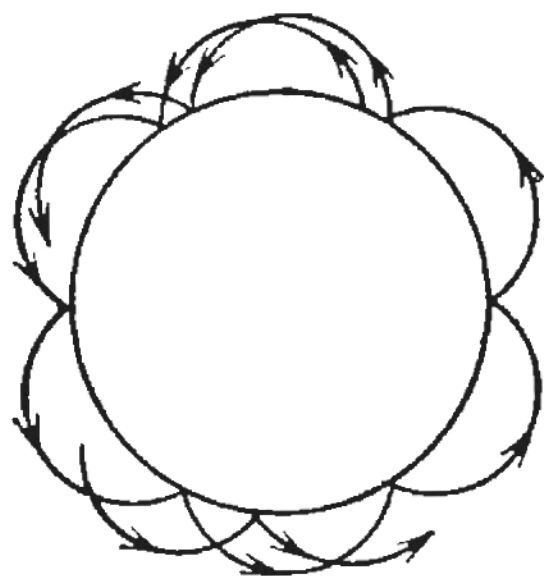


Рис. 2.9

**Ответ.** Существует. **Указание.** Промоделируйте последовательность  $\sin 0, \sin 1, \sin 2, \sin 3, \dots$  бильярдом в круге радиуса 1 и учтите, что числа 1 и  $2\pi$  несоизмеримы (рис. 2.8).

**Задача 2.4.** При качении одной окружности по другой любая точка катящейся окружности описывает кривую с «остриями» — эпициклоиду (рис. 2.9). Докажите, что если радиусы этих окружностей несоизмеримы, то «острия» эпициклоиды заполняют неподвижную окружность всюду плотно.

**Задача 2.5.** По окружности  $S_1$  длины  $\sqrt{2}$  катится снаружи окружность  $S_2$  длины 1 (без проскальзывания). На окружности  $S_2$  красным цветом отмечена точка  $A$  касания двух окружностей. При качении окружности  $S_2$  по  $S_1$  точка  $A$  делает на  $S_1$  в точках касания красные отпечатки  $A_1, A_2, A_3, \dots$ . В свою очередь, получающиеся красные точки на окружности  $S_1$  делают отпечатки на окружности  $S_2$ , которые, в свою очередь, делают отпечатки на окружности  $S_1$  и т. д. Сколько красных точек будет на окружности  $S_1$ , когда окружность  $S_2$  сделает  $n$  оборотов около  $S_1$ ? Иными словами, с какой скоростью растет число отпечатков на окружности  $S_1$ ?

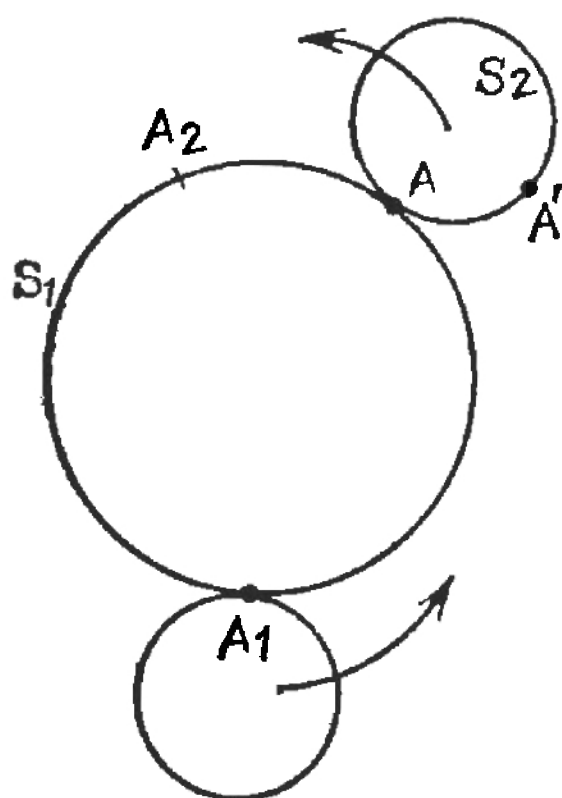


Рис. 2.10

**Ответ.** На неподвижной окружности будет  $n$  точек. **Указание.** После первого оборота на  $S_1$ , кроме точки  $A$ , будет только один красный отпечаток  $A_1$  на расстоянии 1 (по дуге окружности  $S_1$ ) от  $A$  (рис. 2.10), а на  $S_2$  — два отпечатка:  $A'$  — это бывшая точка  $A$  — и отпечаток от точки  $A$ . Точка  $A$  на  $S_2$  уже не даст новых отпечатков на  $S_1$ , а точка  $A'$  даст после одного оборота один новый отпечаток  $A_2$ . Вообще, с каждым оборотом все, кроме одной, красные точки на  $S_2$  пройдут по своим старым следам на неподвижной

окружности и потому не дадут новых отпечатков, и лишь одна новая точка будет давать отпечатки — один за оборот. Таким образом, хотя красные отпечатки заполнят неподвижную окружность всюду плотно, скорость их появления всего лишь линейная.

**Задача 2.6.** Числа  $\alpha$  и  $\beta$  несоизмеримы между собой и с числом  $\pi$ . Докажите, что ни при каком целом  $n$  сумма  $s = \sin n\alpha + \sin n\beta$  не равна 2, но существует бесконечно много таких  $n$ , что  $s$  отличается от 2 меньше чем на 0,000001. С какой частотой встречаются такие числа  $n$ ?

### § 3. Теорема Пуанкаре о возвращении.

Конфигурационное и фазовое пространства.

Парадокс Цермело и модель Эренфестов

1. В математике часто случается, что некоторые утверждения или их следствия удается удачно обобщить и получить при этом ряд новых, неизвестных ранее следствий, иногда далеко выходящих за рамки рассматриваемого вопроса. Таким интересным во многих отношениях обобщением следствия теоремы Якоби о попадании любой точки  $x$  окружности  $S^1$  в любую свою окрестность является теорема Пуанкаре о возвращении, возникшая, впрочем, впервые из потребностей механики. Мы позже расскажем, в связи с чем величайший математик нашего века Анри Пуанкаре сформулировал эту теорему для механики, вначале же по-



говорим о том, как естественным образом обобщается указанное следствие теоремы Якоби.

В этой теореме фигурирует окружность  $S^1$  и преобразование  $T$  — поворот окружности на некоторый угол  $\alpha$ . Далее рассматривается произвольная точка  $x$  на  $S^1$  и ее образы при поворотах на углы  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$  — точки  $x, T(x), T^2(x)=T(T(x)), T^3(x)=T(T^2(x))$  и т. д. (они в формулировке теоремы Якоби обозначались  $P_0, P_1, P_2, \dots$ ). Все образы точки — ее положения на окружности в последовательные моменты времени — в совокупности называются *орбитой* преобразования  $T$ . Про эту орбиту и утверждается, что при иррациональном  $\alpha$  она всюду плотно заполняет окружность, в частности некоторый образ точки  $x$  попадает в любую наперед заданную окрестность точки  $x$  (а при рациональном  $\alpha$  орбита замкнется, т. е. для некоторого  $n$  будет выполнено равенство  $T^n(x)=x$ ).

Окружность  $S^1$  будем считать расположенной на плоскости, а ее поворот представлять себе как преобразование (поворот) всей плоскости, не меняющее площадей фигур, при котором окружность  $S^1$  переходит в себя:  $T(S^1)=S^1$ . Анри Пуанкаре заметил, что если плоскость — двумерное пространство — заменить на пространство любого числа измерений (трехмерное, четырехмерное и т. д.), окружность — на произвольную ограниченную область \*)  $D$  в этом пространстве, а преобразование  $T$  считать *взаимно однозначным* (не «склеивающим» никакие две точки в одну), *сохраняющим* объемы и при этом *переводящим* область  $D$  в себя, то указанное следствие из теоремы Якоби сразу же обобщается, а ее доказательство упрощается. Приведем формулировку теоремы Пуанкаре и ее доказательство.

**Т е о р е м а** **П у а н к а р е** **о** **в о з в р а щ е н и и**. Пусть  $T$  — сохраняющее объемы взаимно однозначное преобразование пространства, переводящее ограниченную область  $D$  пространства в себя:  $T(D)=D$ . Тогда в любой сколь угодно малой окрестности  $U$  внутри  $D$  найдется точка  $x$ , которая после нескольких применений к ней преобразования  $T$  снова возвращается в область  $U$ : точка  $T^n(x)$  принадлежит области  $U$  при некотором  $n > 0$  (рис. 3.1). Более того, почти все точки области  $U$  возвращаются снова в  $U$  — объем невозвращающихся в  $U$  точек равен нулю \*\*).

---

\*) Областью в пространстве называется такая его часть, которая вместе с каждой точкой содержит целиком и некоторый шарик с центром в ней.

\*\*) Мы предполагаем, что множество невозвращающихся точек имеет объем.

**З а м е ч а н и е.** Усилением теоремы Пуанкаре служит утверждение, что почти все точки области  $U$  возвращаются в  $U$  бесконечно много раз. На доказательстве этого усиления мы останавливаться не будем.

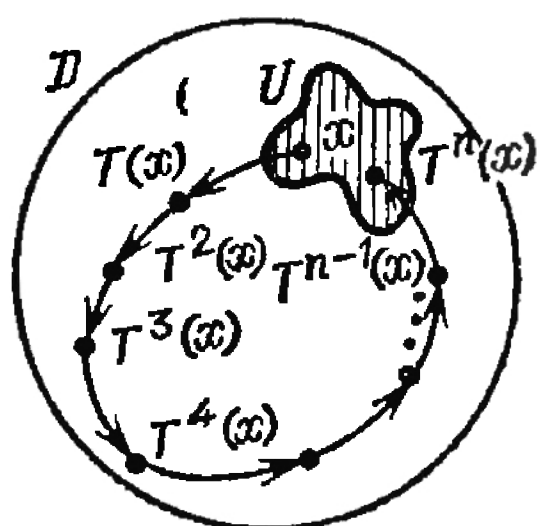


Рис. 3.1

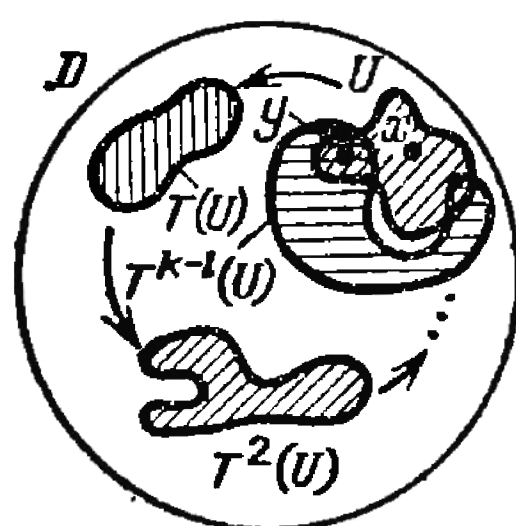


Рис. 3.2

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы П у а н к а р е.** Рассмотрим области  $U=T^0(U)$ ,  $T(U)$ ,  $T^2(U)$ ,  $T^3(U)$ ,  $\dots$ . Их бесконечно много, все они имеют одинаковый ненулевой (по условию) объем и все содержатся внутри  $D$ .

Если бы никакие две из них не пересекались, то суммарный объем равнялся бы бесконечности, и тогда область  $D$  не имела бы конечного объема. Однако область  $D$  ограничена, и поэтому какие-то две (по крайней мере) области  $T^k(U)$  и  $T^l(U)$  ( $k > l \geq 0$ ) пересекаются, т. е. имеют общие точки. Но тогда пересекаются и области  $T^{-l}(T^k(U))=T^{k-l}(U)$  и  $T^{-l}(T^l(U))=T^0(U)=U$  (рис. 3.2). Пусть  $y$  — произвольная точка пересечения областей  $T^n(U)$  и  $U$ , где  $n=k-l$ . Так как каждая точка области  $T^n(U)$  получается из некоторой точки области  $U$  в результате действия преобразования  $T^n$  (по определению записи  $T^n(U)$ ), то и точка  $y$ , лежащая в  $T^n(U)$ , получается из некоторой точки  $x$  области  $U$  таким же способом:  $y=T^n(x)$ . Но точка  $y$  одновременно лежит и в области  $U$ . Следовательно, точка  $x$  через  $n$  шагов вернулась опять в область  $U$ . Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть. Пусть  $V$  — множество невозвращающихся в  $U$  точек. Тогда множества  $V$ ,  $T(V)$ ,  $T^2(V)$ ,  $T^3(V)$ ,  $\dots$  попарно не пересекаются. Действительно, если  $T^k(V)$  и  $T^l(V)$  пересекаются, то множество  $T^{k-l}(V)$  пересекается с  $V$ , а значит, некоторые точки из  $V$  вернулись снова в  $V$ , а тем самым и в область  $U$  — противоречие. Поскольку полученных множеств бесконечно много и все они имеют одинаковый объем  $v$ , то, в силу ограниченности объема области  $D$ , число  $v$  не может быть отличным от нуля. Значит, объем множества  $V$  равен 0. Доказательство теоремы завершено.

Из теоремы Пуанкаре о возвращении мы получим ниже несколько интересных следствий. А пока что отметим, что из нее очень просто получается утверждение теоремы Якоби. Действительно, если  $T$  — поворот окружности  $S^1$  на угол  $\alpha$ , то при  $\alpha = 2\pi \frac{m}{n}$  ( $m$  и  $n$  целые) преобразование  $T^n$  — тождественное и любая точка  $x \in S^1$  через  $n$  шагов возвращается в точности на свое место:  $T^n(x) = x$ . Если же  $\alpha \neq 2\pi \frac{m}{n}$  ни при каких целых  $m$  и  $n$ , то по теореме о возвращении

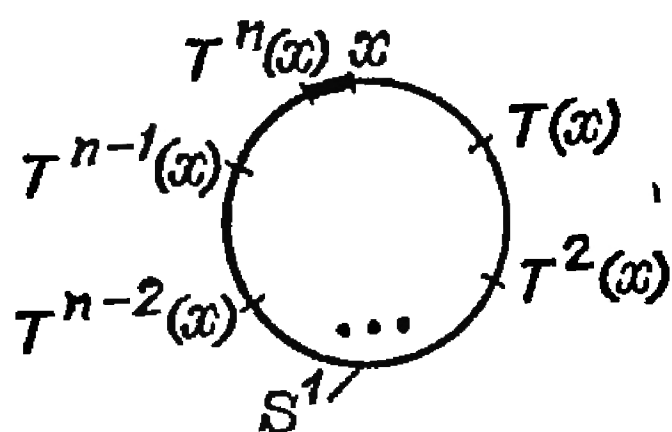


Рис. 3.3

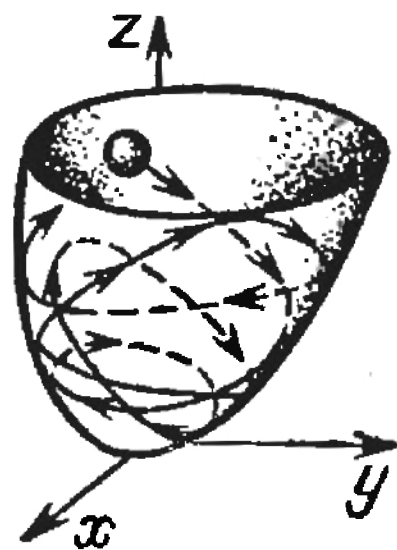


Рис. 3.4

для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое натуральное  $n$ , что  $|T^n(x) - x| < \varepsilon$  (рис. 3.3) — следствие теоремы Якоби получено. Теперь остается лишь заметить, что все точки окружности равноправны, и если  $U$  — любая точка из окрестности  $U$  точки  $x$ , то она снова вернется в эту же окрестность. Теорема Пуанкаре предсказывает также возвращение в окрестность исходного положения шарика, движущегося без трения в несимметричной чашке (рис. 3.4).

Появление теоремы Пуанкаре о возвращении было стимулировано развитием классической механики, которая на рубеже XX века приобрела практически заверченный характер благодаря многочисленным выдающимся математическим работам как самого Анри Пуанкаре, так и других математиков (Лагранжа, Гамильтона, Лиувилля, Якоби и др.). Одним из освежающих моментов, внесенных этими работами в классическую механику, было понятие *конфигурационного и фазового пространств* механической системы. Коснемся коротко этих понятий — они нам пригодятся и при изучении бильярдов (см. часть IV).

2. **Конфигурационное пространство** — это пространство *конфигураций*, т. е. возможных положений заданных объектов. Например, две точки  $x_1$  и  $x_2$ , движущиеся по прямой  $\mathbb{R}^1$ , можно задать одной

изображающей или конфигурационной точкой  $x$ , но уже расположенной на плоскости  $\mathbb{R}^2$ ; при этом первая координата точки  $x$  определяет положение на прямой  $\mathbb{R}^1$  первой точки  $x_1$ , а вторая координата — положение второй точки  $x_2$  (рис. 3.5, а). Три точки  $x_1, x_2, x_3$  на прямой  $\mathbb{R}^1$  заменяются одной точкой  $x = (x_1, x_2, x_3)$  трехмерного конфигурационного пространства  $\mathbb{R}^3$  (рис. 3.5, б); четыре точки  $x_1, x_2, x_3, x_4$  на прямой  $\mathbb{R}^1$  — одной точкой  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  четырехмерного конфигурационного пространства  $\mathbb{R}^4$  и т. д. (Многомерное пространство можно представлять себе как обычное

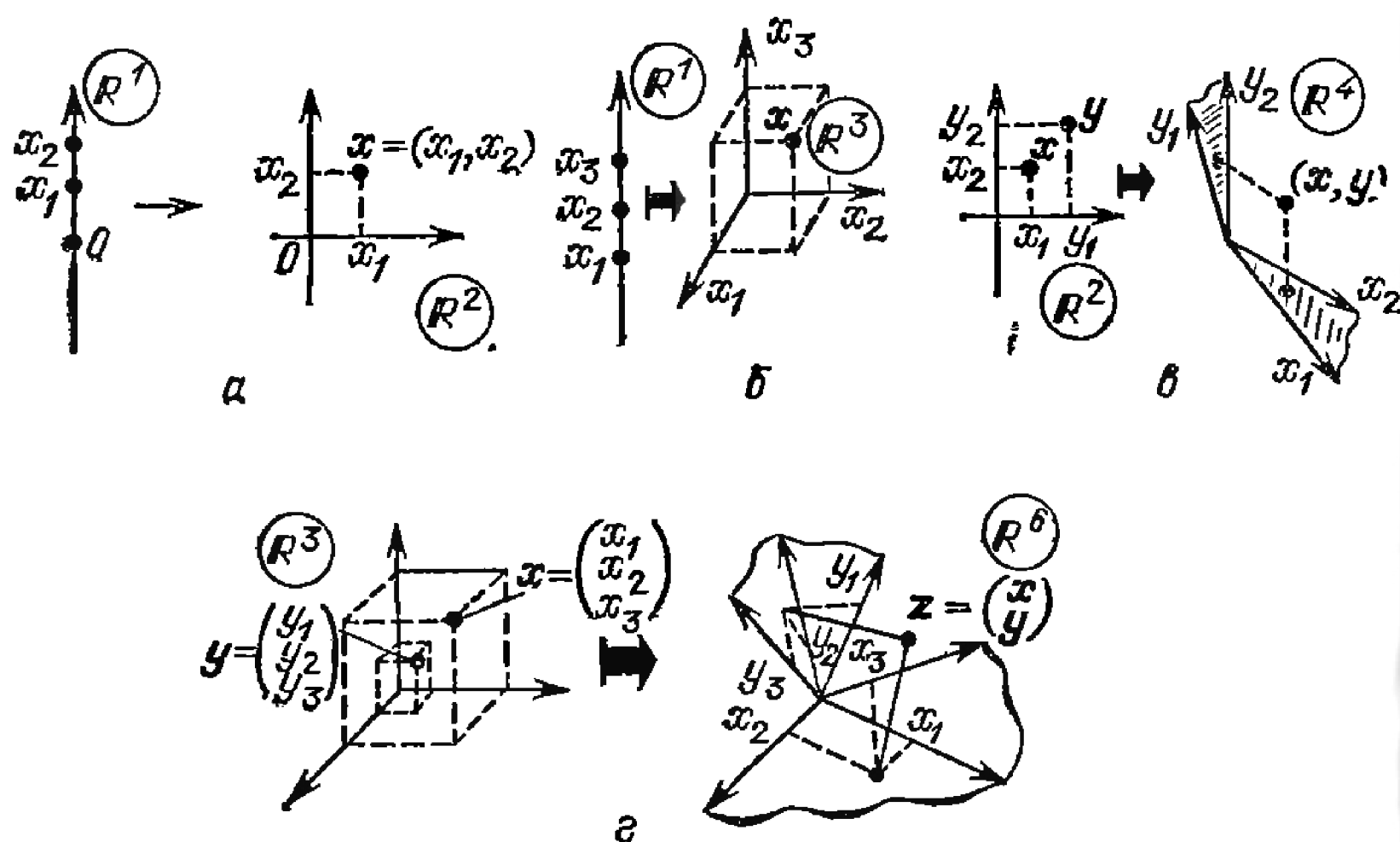


Рис. 3.5

трехмерное, но со многими независимыми осями координат \*); точка  $x = (x_1, \dots, x_n)$  в нем имеет  $n$  координат, т. е. столько, сколько имеется независимых осей.) Увеличение числа объектов увеличивает и число измерений конфигурационного пространства, так называемую *размерность* пространства (число независимых координат), или иначе, *число степеней свободы* системы. Размерность конфигурационного пространства может быть увеличена и за счет увеличения размерности исходного пространства, в котором располагаются сами объекты. Например, две точки  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  задают одну точку  $z = (x, y) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$  в четырехмерном конфигурационном

\*) См. в журнале «Квант» № 6 за 1986 г. статью С. В. Дужина и В. Н. Рубцова «Четырехмерный куб», в которой рассказывается о четырехмерном пространстве, гиперплоскостях и других многомерных объектах.

пространстве  $\mathbb{R}^4$  (рис. 3.5, в), а две точки  $x = (x_1, x_2, x_3)$  и  $y = (y_1, y_2, y_3)$  в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  задаются одной конфигурационной точкой  $z = (x, y) = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$  в 6-мерном пространстве  $\mathbb{R}^6$  (рис. 3.5, г).

Часто на конфигурацию объектов накладываются какие-либо ограничения. Тогда совокупность конфигураций будет заполнять не все многомерное пространство, а лишь его часть, и именно эта часть будет в этом случае называться конфигурационным пространством. Например, если точка  $x_1$  на прямой  $\mathbb{R}^1$  не может обгонять точку  $x_2$ , т. е. если

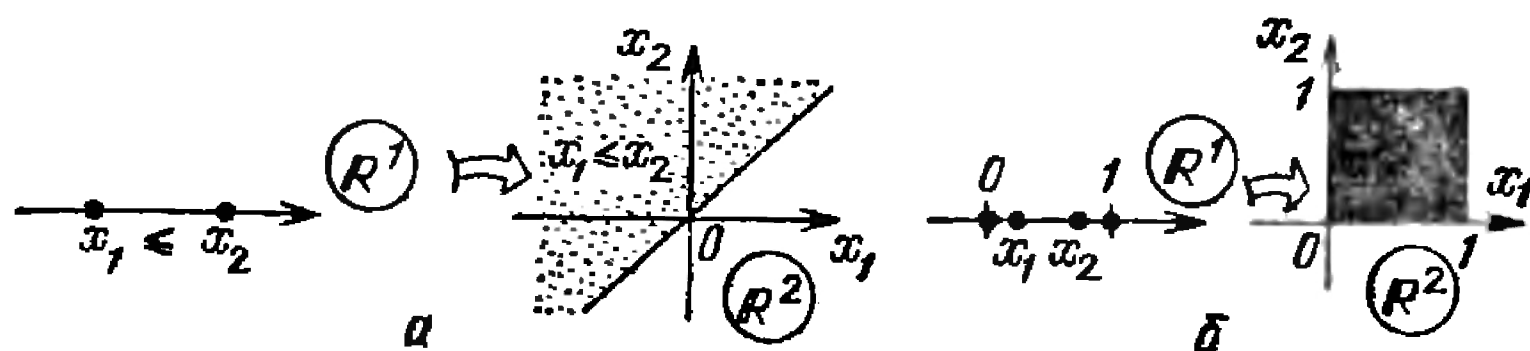


Рис. 3.6

всегда  $x_1 \leq x_2$ , то конфигурационным пространством будет множество точек плоскости  $\{(x_1, x_2)\}$ , удовлетворяющих условию  $x_1 \leq x_2$ , т. е. полуплоскость в плоскости  $\mathbb{R}^2$  (рис. 3.6, а). Если же две точки  $x_1$  и  $x_2$ , двигаясь свободно на отрезке  $[0, 1]$ , не могут покинуть его пределов, т. е.  $0 \leq x_1 \leq 1$  и  $0 \leq x_2 \leq 1$ , то конфигурационным пространством будет множество точек  $\{(x_1, x_2)\}$ , заполняющих квадрат со стороной 1 (рис. 3.6, б).

Еще пример: предположим, что две точки  $x_1$  и  $x_2$  движутся по прямой  $\mathbb{R}^1$  так, что всегда  $x_1 \leq x_2$ , но расстояние между точками не превосходит 1 — точки связаны нерастяжимой (но гибкой) нитью длины 1. Тогда координаты конфигурационной точки  $(x_1, x_2)$  удовлетворяют условиям  $x_1 \leq x_2 \leq x_1 + 1$  и поэтому конфигурационное пространство этой системы — наклоненная под углом  $45^\circ$  полоса шириной  $1/\sqrt{2}$ .

Чтобы показать разнообразие конфигурационных пространств, приведем более экзотические примеры. Конфигурационное пространство системы, состоящей из движущихся по двум окружностям  $S_1^1$  и  $S_2^1$  точек  $x_1$  и  $x_2$  — это множество точек  $x = (x_1, x_2)$  на двумерном торе — поверхности «бублика». Тором является и конфигурационное пространство «двойного маятника» — механической системы из двух связанных вращающихся стержней, изображенной на рис. 8.10 (см. § 8). Каждое положение двойного маятника задается парой углов  $\psi_1, \psi_2$ , меняющихся независимо

друг от друга от 0 до  $2\pi$ . Более подробно о торе рассказывается в § 8.

Множество  $S$  упорядоченных пар точек  $(a, b)$ , первая из которых принадлежит множеству  $A$ , а вторая — множеству  $B$ , называется *прямым произведением* множеств  $A$  и  $B$ :  $S = A \times B$ . Прямое произведение пространств (не являющихся нульмерными — точками) — это пространство бóльшей размерности:  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$  и т. д. Прямые произведения других множеств устроены более сложно: *квадрат* — прямое произведение двух отрезков, *тор* — прямое произведение двух окружностей; *бесконечный цилиндр* — прямое произведение прямой на окружность и т. д. \*).

Иногда только одно введение конфигурационного пространства позволяет решить довольно трудную задачу (эта популярная сейчас олимпиадная задача впервые была опубликована в 6-м выпуске серии «Математическое просвещение», 1961 г.).

**Задача** (Н. Н. Константинов). Из города  $A$  в город  $B$  ведут две дороги (рис. 3.7, а). Два велосипедиста, связанные веревкой длины, меньшей  $2a$ , могут проехать из города  $A$  в город  $B$  по разным дорогам, не разорвав веревки. Смогут ли разминуться, не столкнувшись друг с другом, два толстяка радиуса  $a$  каждый, идя один из города  $A$  в город  $B$ , а другой из города  $B$  в город  $A$ ?

**Решение.** Введем вдоль первой дороги координату  $x_1$ , а вдоль второй дороги — координату  $x_2$  и рассмотрим конфигурационную плоскость  $Ox_1x_2$ . Одновременное положение велосипедистов или толстяков изображается конфигурационной точкой  $x = (x_1, x_2)$  этой плоскости. Одновременному движению по обеим дорогам соответствует движение конфигурационной точки  $x$ . Если длина первой дороги равна  $l_1$ , а второй —  $l_2$ , то координата  $x_1$  меняется от 0 до  $l_1$ , а  $x_2$  — от 0 до  $l_2$ ; следовательно, конфигурационная точка обязана находиться в прямоугольнике  $OKLM$  (рис. 3.7, б), который и является конфигурационным пространством. Велосипедисты начинают двигаться из города  $A$  (точка  $O$  в конфигурационном пространстве), а заканчивают движение в городе  $B$  (вершина прямоугольника  $L$ ). Значит, в конфигурационном пространстве движению велосипедистов соответствует траектория (кривая)  $\alpha$ , идущая из  $O$  в  $L$ .

\*) Не следует думать, что конфигурационное пространство — всегда прямое произведение. Топологически оно может быть устроено сложнее: множество пар точек, находящихся на фиксированном расстоянии на сфере  $S^2$ , — это трехмерная сфера  $S^3$ .



Аналогично, движению толстяков будет соответствовать траектория  $\beta$ , идущая из вершины  $M$  прямоугольника в вершину  $K$ . Очевидно, кривые  $\alpha$  и  $\beta$ , находясь внутри прямоугольника  $OKLM$ , пересекутся в какой-то точке  $x = (x_1, x_2)$  внутри него. В этой точке координаты велосипедистов и толстяков одинаковы. Но это означает, что расстояние между толстяками меньше  $2a$  (ведь велосипедисты

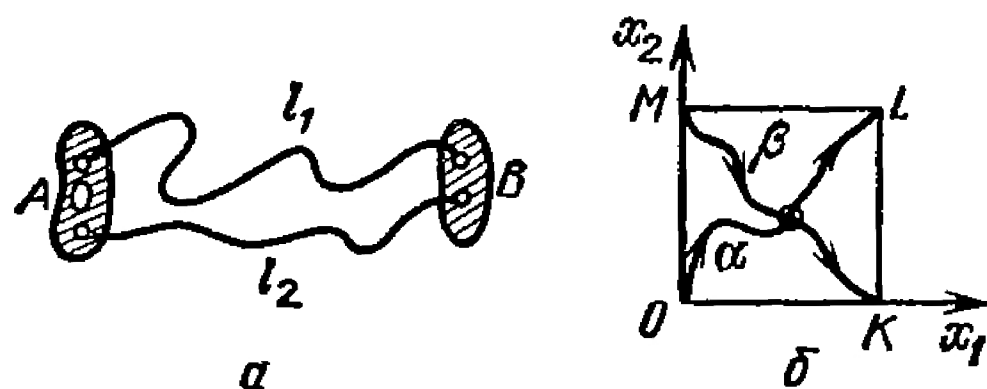


Рис. 3.7

проехали это место, не разорвав веревки!), а следовательно, толстяки обязательно столкнутся. Задача решена.

Другие, более естественные примеры конфигурационных пространств появятся в следующих частях этой книги. При движении конфигурационной точки  $x$  возникает ее траектория  $x(t)$ , называемая *конфигурационной траекторией* или *орбитой*.

**З а д а ч а.** Что является конфигурационным пространством а) круглого бильярда? б) трех точек прямой  $\mathbb{R}^1$ , из которых первые две не обгоняют третьей? в) трех точек прямой  $\mathbb{R}^1$ , из которых первая всегда левее второй, а вторая левее третьей? г) двух точечных планет, движущихся вокруг Солнца по окружностям? д) Какова размерность конфигурационного пространства девяти планет Солнечной системы (планеты считать точками)?

**О т в е т ы.** а) Круг, в котором движется бильярдный шарик. б) Пересечение полупространств  $x_1 \leq x_3$  и  $x_2 \leq x_3$ . в) Пересечение полупространств  $x_1 \leq x_2$  и  $x_2 \leq x_3$ . г) Двумерный тор  $T^2 = S^1 \times S^1$ . д)  $1+1+\dots+1=9$ .

**3. Фазовое пространство.** Рассмотрим движение некоторой системы объектов — частиц, тел и т. п. Добавим к пространству конфигураций  $\{x\}$  этих объектов пространство их скоростей  $\{v\}$  (векторов), т. е. будем рассматривать всевозможные пары  $\{(x, v)\}$ . Полученное множество пар ( $x$  — положение,  $v$  — скорость) называется *фазовым пространством системы*, а изображающая систему точка  $(x, v)$  — *фазовой точкой системы*. Иными словами, фазовым пространством называется множество всевозможных состояний движения системы. Например, если точка  $x$  на прямой  $\mathbb{R}^1$  может двигаться по ней с произвольной скоростью  $v$ , то фазовым пространством будет *плоскость*  $\mathbb{R}^2 = \{(x, v)\}$

(рис. 3.8, а); фазовым пространством двух точек на прямой  $\mathbb{R}^1$  будет четырехмерное пространство  $\mathbb{R}^4$  (рис. 3.8, б), а двух точек на плоскости — 8-мерное пространство  $\mathbb{R}^8$  (поскольку у каждой точки по две координаты положения и по две координаты скорости, итого  $4+4=8$  координат; рис. 3.8, в).

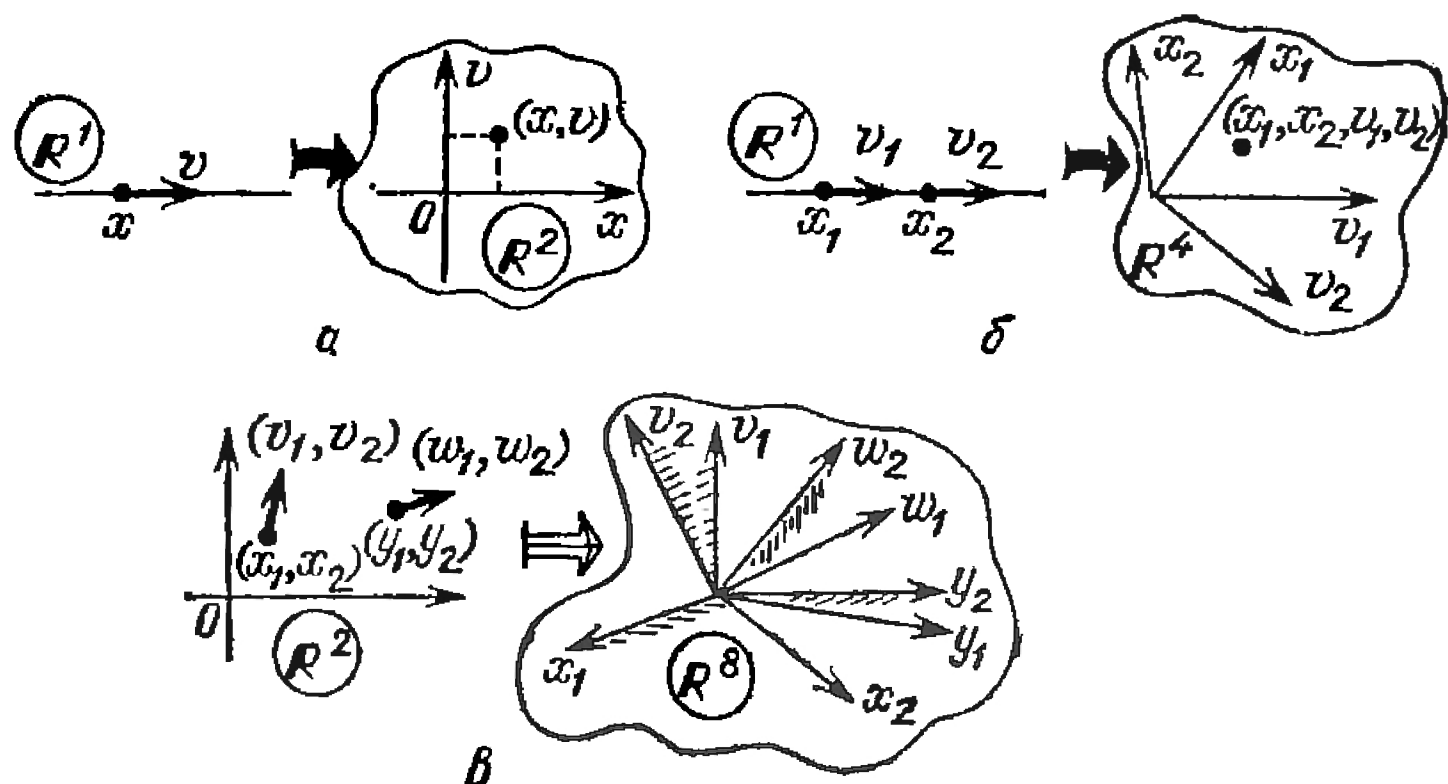


Рис. 3.8

Процесс называется *детерминированным*, если весь его будущий ход и все его прошлое однозначно определяются состоянием в настоящий момент. Такими процессам являются, например, процессы радиоактивного распада и размножения бактерий. Бывают и недетерминированные процессы: таково движение частиц в квантовой механике (ни прошлое, ни будущее не определены настоящим однозначно) или же распространения тепла (будущее определено настоящим, а прошлое — нет).

*Классическая механика* рассматривает движение систем, будущее и прошлое которых однозначно определяются начальными положениями и начальными скоростями всех точек системы, т. е. рассматривает детерминированные процессы. В каждый момент времени  $t_0$  механическая система  $S$  находится в положении  $x(t_0)$  и имеет конкретный вектор скорости  $v(t_0)$ ; фазовая точка этой системы  $(x(t_0), v(t_0))$  полностью и однозначно (детерминированно) характеризует эволюцию системы как в прошлом, при всех  $t < t_0$ , так и в будущем, при всех  $t > t_0$ . Зная одно-единственное состояние движения системы  $S(0) = (x(t_0), v(t_0))$  в момент  $t_0$ , можно однозначно определить состояния движения этой системы сразу во все моменты времени:  $\{S(t)\} = \{(x(t), v(t)), -\infty < t < \infty\}$ . Множество состояний движения  $\{S(t)\}$  —

это множество в с е х фазовых точек  $\{x(t), v(t)\}$ , которое носит название *фазовой траектории*. Таким образом, одна точка фазовой траектории однозначно определяет всю фазовую траекторию (рис. 3.9). Если в момент времени  $t_0$  задать другое начальное состояние движения системы  $S$ , т. е. взять другую начальную фазовую точку  $(x'(t_0), v'(t_0))$ , то и вся фазовая траектория  $\{S'(t)\} = \{x'(t), v'(t)\}$  будет другой. *Никакие две различные фазовые траектории не могут пересекаться*, так как в противном случае по фазовой точке их пересечения  $(x(t_1), v(t_1))$  нельзя было бы однозначно восстановить две р а з н ы е фазовые точки  $(x(t_0), v(t_0))$  и  $(x'(t_0), v'(t_0))$ .

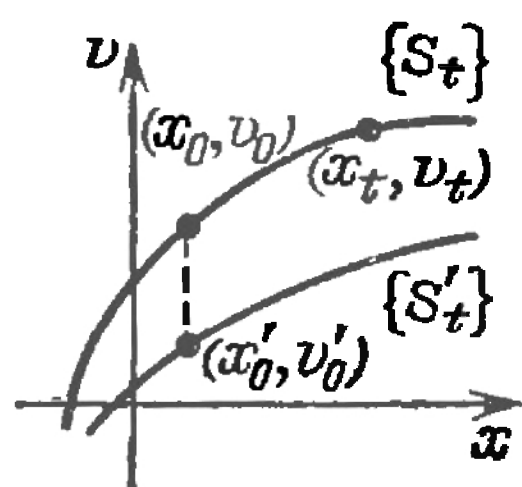


Рис. 3.9

**З а д а ч а.** Может ли фазовая траектория механической системы пересекать саму себя? Быть замкнутой?

**О т в е т.** Не может. Может.

Важно отличать *состояние системы* от *состояния движения*: первое задается *координатами*, второе — *координатами и скоростями*. Зная одни лишь координаты  $\{x\}$ , мы не можем предсказать дальнейшее движение системы, но зная координаты  $\{x\}$  и скорости  $\{v\}$  — можем. Предположение о том, что замкнутую систему можно описать хоть каким-то фазовым пространством и системой кривых в нем (иногда все вместе называют *фазовым портретом*) — это математическое содержание классического принципа детерминизма \*).

Рассмотрим теперь механическую систему  $S$  в момент  $t=0$ . Она может находиться в этот момент в различных состояниях  $S_1(0), S_2(0), S_3(0), \dots$ , которые задаются различными фазовыми точками  $(x_1(0), v_1(0)), (x_2(0), v_2(0)), (x_3(0), v_3(0)), \dots$ . Каждое начальное состояние системы  $S_i(0)$ , т. е. каждая начальная фазовая точка  $(x_i(0), v_i(0))$ , в силу детерминированности, однозначно определяет в с ю

\*) Известен знаменитый парадокс Зенона: летящая стрела и не подвижная стрела находятся в одном и том же месте пространства; чем же отличается полет от неподвижности? Ответ состоит в том, что видимое место стрелы — это всего лишь проекция  $x$  на пространство положений ее «истинного места» в пространстве пар  $(x, v)$ : от фазового пространства остается только конфигурационное. Парадокс Зенона можно истолковать как первую догадку о роли фазового пространства.

фазовую траекторию  $\{S_i(t)\}$  в фазовом пространстве, так что для указанных начальных состояний системы  $S$  определено сразу бесконечно много фазовых траекторий  $\{S_1(t)\}$ ,  $\{S_2(t)\}$ ,  $\{S_3(t)\}$ , ... (рис. 3.10). Преобразование, переводящее любую начальную фазовую точку  $(x(0), v(0))$  в точку  $(x(t), v(t))$ , называется фазовым преобразованием за время  $t$ ,  $T^t$ , а множество всех преобразований  $\{T^t\}$  — фазовым потоком: *каждая фазовая точка движется по своей фазовой кривой*.

В фазовом пространстве начальные состояния системы  $S$  могут занимать некоторую область  $U=U(0)$ . В момент  $t$

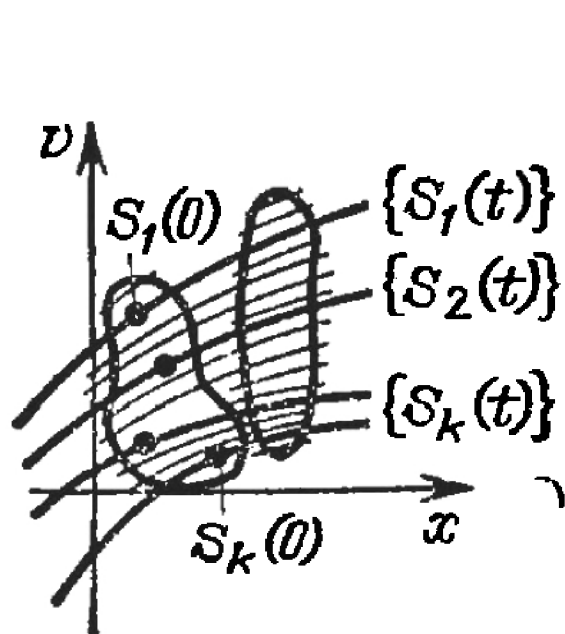


Рис. 3.10

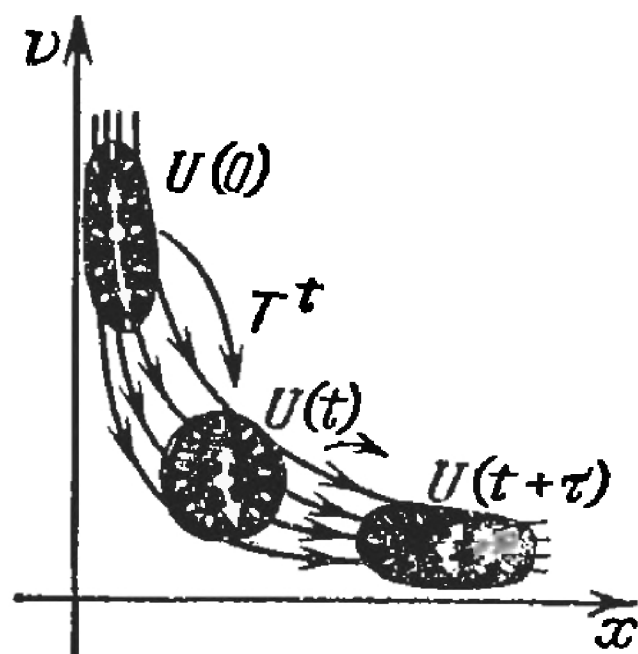


Рис. 3.11

все точки области  $U$ , двигаясь каждая по своей фазовой траектории, оказываются в новых точках фазового пространства и образуют новую область  $U(t)$  (рис. 3.11). Как связаны между собой области  $U(0)$  и  $U(t)$ ? Оказывается, на этот счет для многих механических систем (в частности, для так называемых *гамильтоновых* систем) справедлива следующая замечательная теорема.

**Т е о р е м а Л и у в и л л я.** *Объемы областей  $U(0)$  и  $U(t)$  одинаковы.*

В дальнейшем будут рассматриваться системы, для которых утверждение теоремы Лиувилля будет выполняться. Исходя из этой теоремы, все фазовое пространство можно представлять себе заполненной несжимаемой жидкостью, которая движется в фазовом пространстве (несжимаемость и означает сохранение объемов). Разберем два примера движения такой «фазовой жидкости».

**П р и м е р 1.** Исследуем, как меняются состояния десяти планет Солнечной системы. Для простоты будем считать, что каждая из них представляет собой точку массы 1 и движется вокруг Солнца по своей окружности, не влияя на остальные планеты. Тогда фазовым пространством этой

системы является 54-мерное пространство  $\mathbb{R}^{54}$ , поскольку у каждой планеты три пространственные координаты (они выделяют  $3 \times 9 = 27$ -мерное конфигурационное пространство  $\mathbb{R}^{27}$ ) и три координаты вектора скорости (они выделяют  $3 \times 9 = 27$ -мерное пространство скоростей). Однако поскольку каждая планета с номером  $k$  (планеты нумеруются в порядке удаления от Солнца) движется по окружности, то ее пространственные координаты  $(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})$  удовлетворяют условию  $x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + x_{3,k}^2 = R_k^2$ , где  $R_k$  — радиус орбиты  $k$ -й планеты, и поэтому конфигурационная точка  $x$ , изображающая положение всех девяти планет, движется не по всему 27-мерному пространству, а лишь по его ограниченной части — так называемому 9-мерному тору  $\mathbb{T}^9 = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{9 \text{ раз}}$

(о торе см. далее главы 3 и 8). Кроме того, абсолютная величина (модуль) скорости каждой планеты постоянна:  $|v_k| = \sqrt{v_{k,1}^2 + v_{k,2}^2 + v_{k,3}^2} = \text{const}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 9$ . Каждое из этих девяти равенств задает двумерную сферу, а все равенства вместе выделяют в 27-мерном пространстве скоростей ограниченную часть — 18-мерное «многообразие»  $\mathbb{M}^{18} = \underbrace{S^2 \times S^2 \times \dots \times S^2}_{9 \text{ раз}}$ .

В итоге в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^{54}$  выделяется некоторое ограниченное  $9 + 18 = 27$ -мерное множество  $D = \mathbb{T}^9 \times \mathbb{M}^{18}$ , переходящее под действием фазового потока  $T$  в себя:  $T(D) = D$ . Если  $(x(0), v(0)) \in D$  — фазовая точка для обозначения состояния Солнечной системы в момент  $t=0$  и  $U$  — ее произвольная окрестность, т. е. множество всех близких по координатам и скоростям положений планет Солнечной системы, то  $U$  — область в  $D$ , объем которой под действием преобразования  $T$  не меняется:  $\text{объем } T(U) = \text{объем } U$  по теореме Лиувилля. Мы пришли к условиям теоремы Пуанкаре о возвращении и можем заключить из нее, что *через некоторое время все планеты окажутся вблизи своих начальных положений и будут иметь приблизительно начальные скорости*: при некотором  $n$  точка  $T^n(x(0), v(0))$  будет лежать в той же окрестности  $U$ , что и начальная фазовая точка  $(x(0), v(0))$ .

Другим замечательным примером движения несжимаемой фазовой жидкости, обсуждением которого мы и закончим этот параграф, служит следующая динамическая система, имеющая уже некоторое отношение к бильярдам.

**Пример 2\*.** Возьмем два сосуда, один ( $A$ ), наполненный газом, другой ( $B$ ) пустой. Что произойдет, если эти

сосуды соединить трубкой и открыть клапан соединительной трубки?

В соответствии со вторым началом термодинамики газ устремится из сосуда *A* в сосуд *B* и будет перетекать из *A* в *B*, пока давление в обоих сосудах не сравняется. Однако мы сейчас рассмотрим эту же ситуацию совершенно с другой точки зрения, при этом привлечем теорему Пуанкаре о возвращении и получим совершенно неожиданный результат!

В статистической механике считается, что газ в сосуде состоит из большого числа молекул, взаимодействующих по законам классической механики. Такой газ является замкнутой (гамильтоновой) системой с большим числом

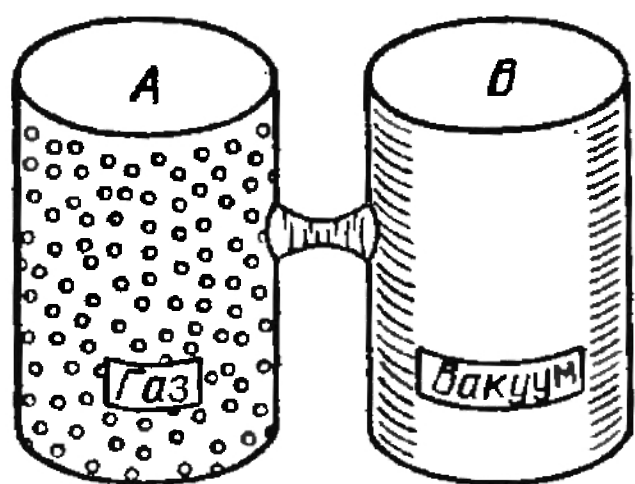


Рис. 3.12

степеней свободы, и поэтому фазовое пространство этой системы имеет очень большую размерность (как известно, в кубическом сантиметре при нормальных условиях содержится приблизительно  $10^{23}$  молекул). Фазовый поток, определяемый уравнениями движения молекул газа, по теореме Лиувилля не меняет объемов областей фазового пространства. А тогда при-

менима теорема Пуанкаре: фазовая точка подходит с течением времени *сколь угодно близко* к своему начальному состоянию, такому, при котором все молекулы газа перейдут опять в сосуд *A* (рис. 3.12).

Итак, через некоторое время газ снова соберется в сосуде *A*, а в сосуде *B* вновь будет вакуум. Возникает явное противоречие со вторым началом термодинамики: из него следует, что газ соберется снова в сосуде *A* с вероятностью 0, а теорема Пуанкаре утверждает, что — с вероятностью 1!

Это противоречие носит название *парадокса Цермело* по имени математика, придумавшего его в связи с дискуссией между физиками по обоснованию термодинамики с позиций молекулярно-кинетической теории. Разгадка парадокса состоит в том, что «некоторое время», через которое повторится исходное (вернее, почти исходное) положение молекул газа, больше времени существования Солнечной системы.

Указанную разгадку наглядно интерпретировали в 1907 году известные физики Пауль и Татьяна Эренфесты на простой и красивой вероятностной модели. Сосуд *A* содержит большое количество пронумерованных шаров («мо-



лекул газа»), а сосуд  $B$  пуст. Из третьего сосуда, наполненного пронумерованными билетиками, вынимается наугад один (скажем 17-й), и тогда шар, отмеченный этим номером, перекладывается из  $A$  в  $B$ . Билетик возвращается обратно и возобновляется вынимание билетиков и перекладывание шаров из сосуда в сосуд. Каждый раз, вынимая наугад какой-то номер от 1 до  $N$  ( $N$  — общее первоначальное число шаров в сосуде  $A$ ), шар с этим номером перекладывают из того сосуда, в котором он находится в этот момент, в другой (рис. 3.13).

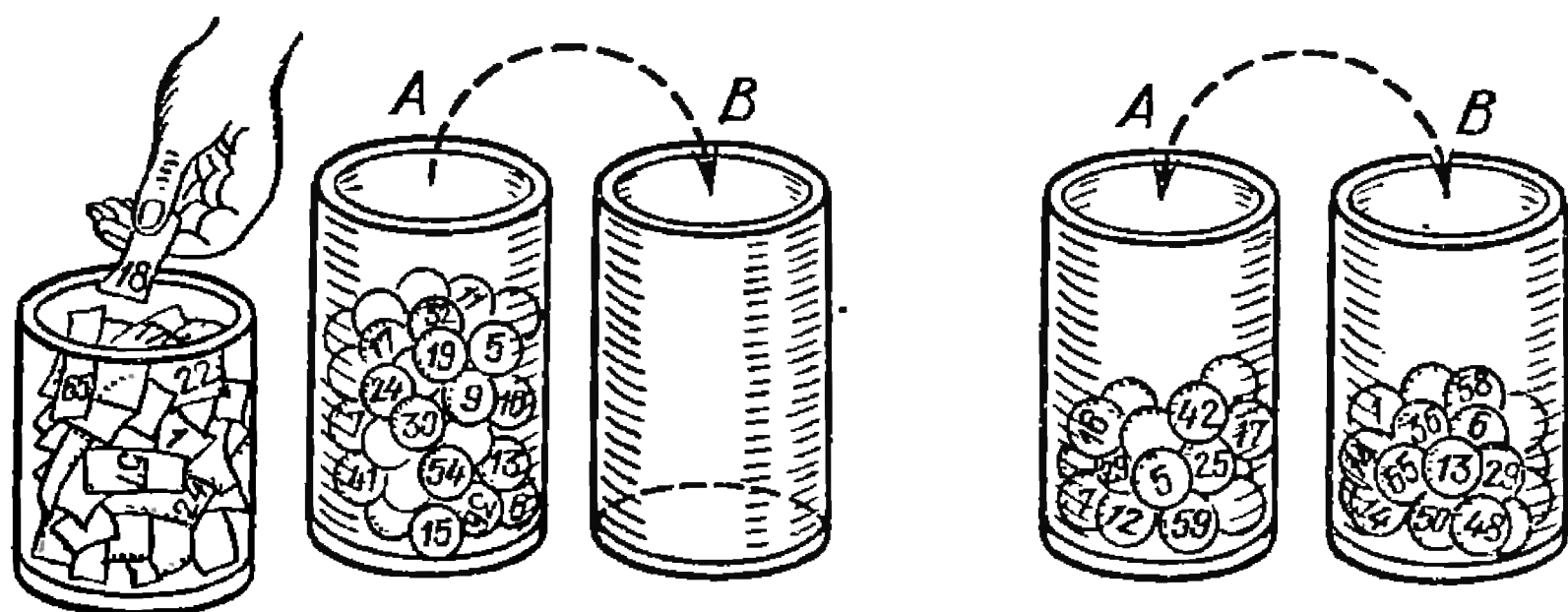


Рис. 3.13

Интуиция подсказывает нам, что до тех пор, пока в сосуде  $A$  шаров намного больше, чем в сосуде  $B$ , вероятность того, что мы вынем номер, принадлежащий шару из сосуда  $A$ , будет заметно больше вероятности того, что мы вынем номер, принадлежащий шару из сосуда  $B$ . Таким образом, вначале будет наблюдаться сильный «переток» шаров из сосуда  $A$  в сосуд  $B$ . Продолжая вынимать билетики, мы заметим, что вероятность вытягивания номера шара из сосуда  $A$  будет меняться в зависимости от предыдущих выниманий билетиков. (Эта форма зависимости вероятности от предшествующих событий носит название *цепи Маркова*, и в модели, которую мы рассматриваем, все имеющие к этому отношение факты могут быть строго и точно выведены.) Оказывается, что в среднем число шаров в сосуде  $A$  будет в действительности убывать с той скоростью, которую и предсказывает термодинамическая теория, пока примерно половина шаров не окажется в сосуде  $B$ . Но вычисления показывают также, что если игру продолжать достаточно долго, то с вероятностью 1 все шары попадут назад в сосуд  $A$ , как и утверждает теорема Пуанкаре!

Сколько же выниманий в среднем требуется, чтобы вернуться снова к этому исходному положению? Ответ гласит —  $2^N$ , а это исключительно большое число, даже если

количество шаров  $N$  не превосходит 100. Этим и объясняется, почему наблюдения, которые мы производим, дают нам движение шаров только в одном направлении без каких-либо осцилляций — мы слишком недолго ждали!

Для экспериментальной проверки теоретических подсчетов игру Эренфестов провели на ЭВМ. Начали с 16 384 шаров в сосуде  $A$ , и каждый «прогон» состоял из 200 000 выниманий. Была вычерчена кривая, дающая число шаров в сосуде  $A$  по результатам каждой тысячи выниманий

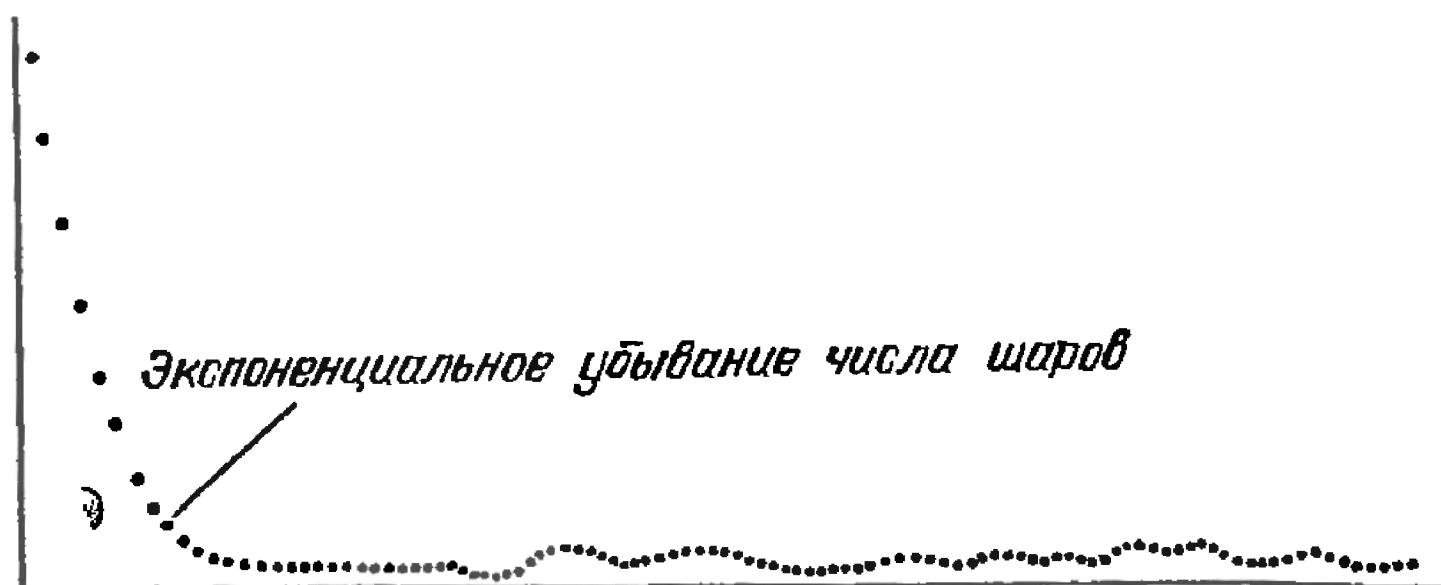


Рис. 3.14

(рис. 3.14). Как и ожидалось, убывание числа шаров в сосуде  $A$  сначала происходило по экспоненциальной кривой. Но, начиная со значения, близкого к положению равновесия (т. е. к 8192 — половине общего числа шаров), кривая стала неровной, произвольно отклоняясь то вверх, то вниз.

Прокомментируем парадокс Цермело еще и с бильярдных позиций. Рассмотрим для этого прямоугольный бильярдный стол без луз, на котором находятся 16 бильярдных шаров. Предположим, что эти шары, как и молекулы газа в сосуде, движутся без трения по поверхности бильярдного стола, сталкиваясь упруго друг с другом и с его бортом. Мысленно разделим весь стол на две равные части — левую ( $A$ ) и правую ( $B$ ). Введем понятие *с о с т о я н и я*. Бильярд находится в состоянии 0, если в пределах левой половины нет ни одного шара; в состоянии 1, если в пределах левой половины находится 1 шар; в состоянии 2, если в пределах левой половины находятся 2 шара, и т. д.; в состоянии 16, если в половине  $A$  собрались все 16 шаров.

Заметим теперь, что состояния 0 и 16 могут быть реализованы *е д и н с т в е н н ы м* способом: когда все шары находятся справа или когда все они находятся слева. Состояния 1 и 15 могут быть реализованы 16-ю различными способами: первый шар находится слева, остальные — спра-

ва; второй шар находится слева, остальные — справа и т. д. Для подсчета числа способов, которыми могут быть реализованы состояния 2 и 14, будем рассуждать так. Имеется 15 способов, в которых участвует шар номер 1, а именно: слева (справа) находятся шары 1 и 2, 1 и 3, . . . , 1 и 16; 14 способов, в которых участвует шар номер 2: это шары 2 и 3, 2 и 4, . . . , 2 и 16 (способ «2 и 1» уже учтен в предыдущем случае); 13 способов с участием шара номер 3: это шары 3 и 4, 3 и 5, . . . , 3 и 16; и так далее. Всего получаем  $15+14+\dots+2+1=120$  способов. Количество способов, которыми может быть реализовано каждое состояние, назовем его «весом». Сведем «веса» в таблицу.

Состояния	Количество способов реализации («вес»)
0 и 16	1
0 и 15	16
2 и 14	120
3 и 13	560
4 и 12	1820
5 и 11	4368
6 и 10	8008
7 и 9	11 440
8	12 870

Из таблицы видно, что наибольшим числом способов могут быть реализованы состояния 7, 8 и 9, т. е. состояния, когда примерно половина шаров расположена на левой половине бильярда, а другая половина — на правой. Для каждого отдельного шара нет никаких оснований выделять преимущественную область его пребывания. С тем же успехом мы можем утверждать, что нет никаких оснований предпочесть одну какую-либо конфигурацию расположения другой. А тогда, какова бы ни была эта конфигурация, рано или поздно она реализуется, а средний промежуток времени, в течение которого на бильярдном столе имеет место данная конфигурация, одинаков для всех конфигураций. Каждый из рассмотренных выше способов представляет частный случай конфигурации. Следовательно, средний промежуток времени, в течение которого бильярд находится в данном состоянии, пропорционален количеству способов, которыми реализуется данное состояние. Поэтому большую часть времени бильярдный стол проводит в сос-

стоях 7, 8, 9 (примерно в 12 тысяч раз большую, чем в состояниях 0 и 16).

Можно рассуждать и иначе. Если, бросив взгляд на бильярдный стол, мы застали его в состоянии 0 или 1 (15 или 16), у нас есть все основания ожидать, что в скором времени на смену этому состоянию придет какое-нибудь более часто встречающееся (аналог выравнивания давления в примере с сосудами *A* и *B* с газом). Наоборот, если мы застаем стол в состоянии 7, 8 или 9, у нас есть все основания считать, что еще в течение достаточно долгого времени он будет пребывать в этом состоянии. Можно сказать, что «состояние бильярда стремится к состояниям 7, 8 или 9». Это верно в том смысле, что действительно на смену редко встречающимся состояниям быстро приходят часто встречающиеся состояния.

Состояния, введенные выше, имеют и определенный физический смысл. Заметим, что общая масса шаров, расположенных, скажем, в левой половине бильярда, равна массе одного шара, умноженной на номер состояния. С этих позиций можно сказать, что большую часть времени бильярдная система проводит в таком состоянии, когда масса шаров, расположенных слева, примерно равна массе шаров справа.

Мы специально потратили так много времени, чтобы читатель смог до конца понять и как следует прочувствовать следующее обстоятельство. Единственно реально наблюдаемое на поверхности стола физическое явление — это то, что шары двигаются, сталкиваются друг с другом и с бортом стола, и вследствие этого описывают весьма сложные траектории. Все остальное есть лишь различные способы описания этого обстоятельства и, возможно, различные его следствия. Обнаруженные нами закономерности выполняются тем точнее, чем больше имеется шаров (или молекул газа в сосуде). Например, для 16 шаров средний промежуток времени, в течение которого стол будет находиться в одном из «средних» состояний, составляет примерно 0,328 от полного времени наблюдения, для 50 шаров — уже 0,8, для 100 шаров — 0,94, ну а для  $10^{23}$  молекул газа в сосуде оно неотличимо от 1 (вспомним, что для газа из такого числа молекул фазовое пространство  $6 \cdot 10^{23}$ -мерно!).

Тем самым решение парадокса Цермело становится полностью прозрачным: система молекул стремится к состоянию с наибольшим «весом», а состояние с наименьшим возможным «весом», хотя обязательно и реализуется — по теореме Пуанкаре, — но в среднем это происходит ничтожно

редко. Как остроумно ответил великий физик Л. Больцман на возражения Цермело, связанные с теоремой Пуанкаре: «Долго же Вам придется ждать!»

**З а д а ч а\*.** Доказать, что если между бильярдными шарами на прямоугольном столе произошёл хотя бы один удар, то за бесконечное время их произойдет бесконечно много. **У к а з а н и е.** Достаточно доказать, что в системе произойдет ещё хотя бы один удар (не обязательно между теми же шарами). Если состояние системы «типичное», то по теореме Пуанкаре система вернется в близкое к исходному состояние, и нужный нам удар произойдет. Но даже и в «исключительном» состоянии системы произойдет второй удар, так как рассматриваемую задачу можно свести к движению точки на торе (см. части II—IV), траектория которой — либо периодическая (и тогда система возвращается в точности в исходное состояние), либо всюду плотна (и тогда система приходит в близкое состояние).

## Глава 2

### БИЛЬЯРД В ЭЛЛИПСЕ

Нельзя отрицать, что буквально с первого взгляда круг привлекает нас своей простотой, однако даже самому консервативному астроному достаточно лишь мимолетного знакомства с эллипсом, чтобы убедиться в том, что идеальная простота круга сродни бессмысленной улыбке идиота. По сравнению со сведениями, которые несет эллипс, круг не дает ничего. Возможно, рассчитывая на физическую простоту Вселенной, мы тоже мыслим окружностями, проецируя свое элементарное мышление на бесконечно запутанный окружающий мир...

Э. Белл.

Математика — царница и служанка науки

Стол не выстлан сукном,  
Кий изогнут крюком,  
И шары все на эллипс похожи

Поэма «Микадо»

#### § 4. Эллипс и его бильярдные свойства. Каустики

Хорошо известна задача о нахождении на заданной прямой  $l$  такой точки  $M$ , для которой сумма расстояний до двух заданных точек  $A$  и  $B$ , лежащих по одну сторону от прямой  $l$ , — наименьшая.

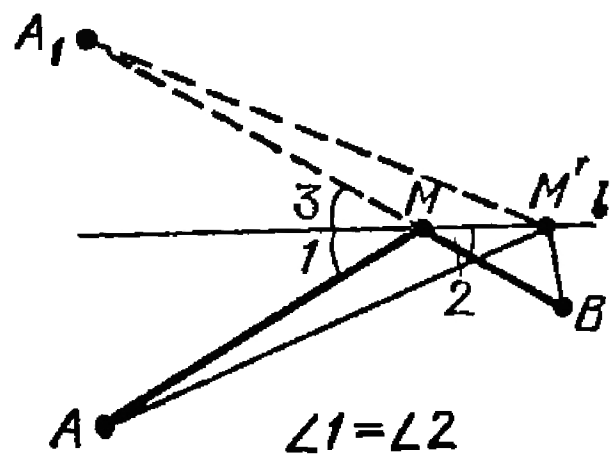


Рис. 4.1

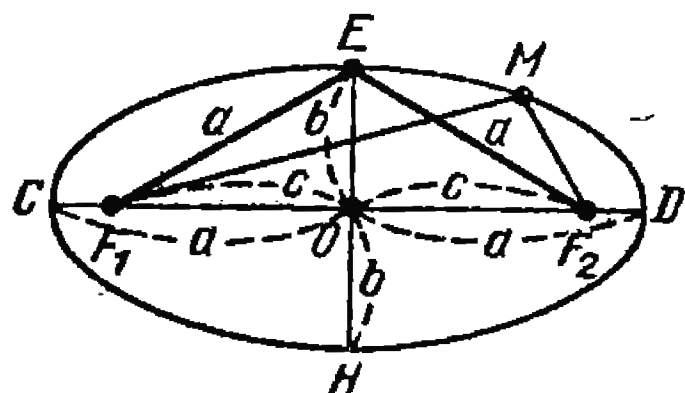
Искомой будет точка  $M$  пересечения отрезка  $A_1B$  с прямой  $l$ , где  $A_1$  — точка, симметричная точке  $A$  относительно прямой  $l$  (рис. 4.1). Действительно,  $AM + MB = A_1M + MB = A_1B$ , тогда как для любой другой точки  $M'$  на прямой  $l$  имеем

$$AM' + M'B = A_1M' + M'B > A_1B,$$

что вытекает из неравенства треугольника (для  $\triangle A_1M'B$ ). Следовательно,  $AM' + M'B > AM + MB$ .



И хотя эта задача настолько популярна, что без нее практически не обходится ни одно обсуждение задач на максимум и минимум \*), мы призели ее здесь потому, что она послужит нам необходимым трамплином при нахождении аналогичной точки  $M$  на произвольной кривой; при исследовании этой общей задачи мы сразу же столкнемся с необходимостью использовать понятие эллипса и его бильярдные свойства.



**Рис. 4.2**

Какое же отношение рассмотренная задача имеет к эллипсу, гиперболе или же другой кривой? И при чем здесь бильярд?

Впрочем, на последний вопрос ответить просто. Взглянем еще раз на рис. 4.1:  $\angle 1 = \angle 3$ , а так как, кроме того,  $\angle 2 = \angle 3$  (как вертикальные углы, ведь  $A_1MB$  — прямая!), имеем  $\angle 1 = \angle 2$ . Следовательно, точка  $M$  на прямой  $l$  обладает тем свойством, что  $AM$  и  $BM$  являются звеньями одной бильярдной траектории: эти звенья образуют равные углы с «зеркалом»  $l$  (угол падения равен углу отражения).

Вот теперь мы достаточно «вооружены» для рассмотрения первого бильярдного, или оптического, свойства эллипса. Но прежде чем обсуждать его, поговорим о самом эллипсе и его простейших геометрических свойствах.

**О п р е д е л е н и е.** *Эллипсом* называется множество точек  $M$  на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек  $F_1$  и  $F_2$  этой плоскости — величина постоянная (рис. 4.2):

$$F_1 M + F_2 M = \text{const.}$$

**Задача 4.1.** Можно ли в эллипс вписать правильный многоугольник? Если можно, то сколько сторон он может иметь?

О т в е т. Можно вписать только правильный треугольник и квадрат, поскольку вписанный правильный многоугольник вписан одновременно и в окружность, пересекающуюся с эллипсом не более чем в четырех точках — вершинах многоугольника.

На рис. 4.3 показано, как можно начертить эллипс на бумаге. Положим лист бумаги на чертежную доску и приколем к нему две кнопки или булавки. Напросив на них нитяное кольцо, длина которого должна быть больше удвоенного расстояния между кнопками, натянем нить острием

\*) См., например, недавно вышедшую в серии «Библиотечка «Квант» книгу В. М. Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах» (М., 1986), а также книгу Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые» (М., 1978).

карандаша, чтобы получился треугольник  $F_1MF_2$ . Если вести карандаш по бумаге так, чтобы нить все время оставалась натянутой, то треугольник будет деформироваться, но его периметр будет оставаться постоянным. Постоянной будет и длина стороны  $F_1F_2$ ; следовательно  $F_1M + F_2M = \text{const}$  и карандаш опишет эллипс. (Этот способ вычерчивания эллипса используют садовники при изготовлении цветочных эллиптических клумб, только они вместо кнопок втыкают в землю два колышка, натягивают кольцо из веревки, а сам эллипс вычерчивают на земле не карандашом,

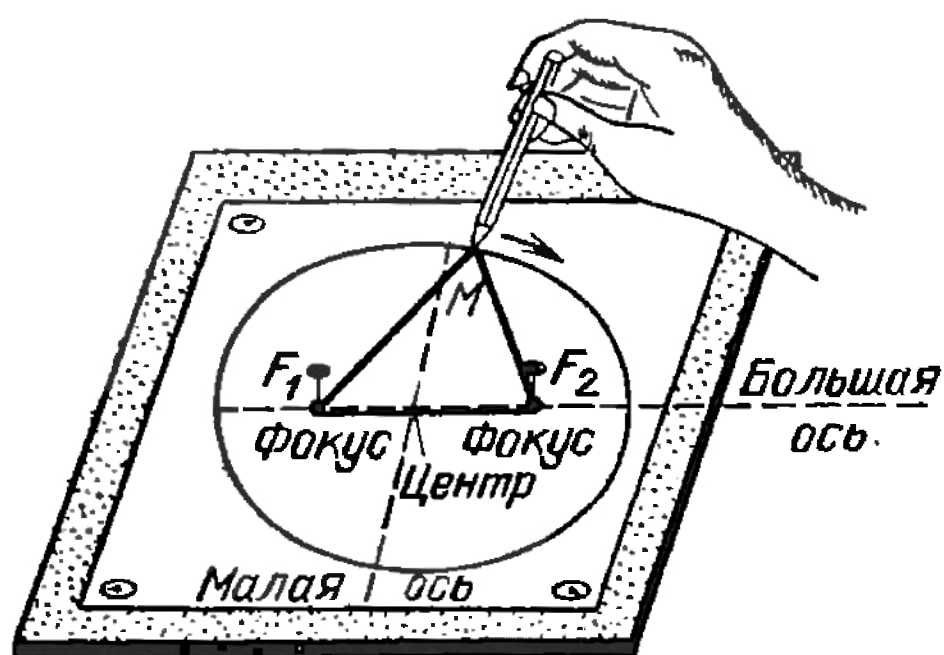


Рис. 4.3

а палкой с острым концом. Аналогичным способом действовали древние этруски, рисуя сложные овалы — разгадку способа рисования предложил великий физик Максвелл, и с тех пор они называются «овалами Максвелла».)

Точки  $F_1$  и  $F_2$  носят названия *фокусов эллипса* (от латинского fo-

cus — очаг \*)); середина  $O$  отрезка  $F_1F_2$  (линии фокусов) — *центр эллипса*; отрезки  $CD$  и  $EH$ , первый из которых — продолжение линии фокусов, а второй перпендикулярен ему и проходит через центр  $O$  эллипса (рис. 4.2), называются *осями эллипса*, и если  $CD \geq EH$ , то  $CD$  — *большая ось*, а  $EH$  — *малая*; половины этих осей, т. е. отрезки  $OD$ ,  $OC$  и  $OE$ ,  $OH$  называются *полуосями*, соответственно, *большой* и *малой*; отношение расстояния от фокуса до центра к большой полуоси, т. е. число  $OF_1/OC$  (или  $OF_2/OD$ ), равное также отношению  $F_1F_2$  к большой оси  $CD$ , характеризует «сплюснутость» эллипса и называется его *эксцентриситетом*. При совпадении фокусов эксцентриситет равен нулю и эллипс превращается в окружность.

Обозначив большую полуось буквой  $a$  ( $OC = OD = a$ ), малую — буквой  $b$  ( $OE = OH = b$ ), половину длины отрезка фокусов  $F_1F_2$  — буквой  $c$  ( $OF_1 = OF_2 = 1/2 F_1F_2 = c$ ) и эксцентриситет — буквой  $e$  ( $OF_1/OC = OF_2/OD = e$ ), найдем связь между этими величинами. Соединив для этого точку  $E$  с фокусами, получим равнобедренный треугольник  $F_1EF_2$  (рис. 4.2). Найдем его стороны.

\*) По причине, которая будет ясна дальше.

Поскольку для любой точки  $M$  эллипса  $F_1M + F_2M = \text{const}$ , то, взяв в качестве  $M$  точку  $D$  — правый конец большой полуоси эллипса, получим

$$F_1C = F_2D, \quad F_1D + F_2D = \text{const}, \quad F_1D = F_1O + a,$$

поэтому

$$F_1D + F_2D = a + (F_1O + F_1C) = a + a = 2a$$

Итак,  $\text{const} = 2a$ . Тогда для  $\triangle F_1EF_2$  имеем  $F_1E + EF_2 = 2a$ , а поскольку  $F_1E = EF_2$ , то  $F_1E = EF_2 = a$ . А теперь рассмотрим прямоугольный треугольник  $F_1OE$  с катетами  $EO = b$ ,  $OF_1 = c$  и гипотенузой  $EF_1 = a$ . Из него  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ,  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ , а эксцентриситет эллипса равен

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a};$$

отсюда  $c = ae$  и  $b = \sqrt{a^2 - (ae)^2} = a\sqrt{1 - e^2}$ .

**Задача 4.2.** В эллипсе с большой полуосью 10 см и эксцентриситетом 0,1 вычислить, во сколько раз расстояние между фокусом и центром превосходит разность полуосей.

**Ответ.** В 20 раз ( $= 1 \text{ см} : 0,5 \text{ мм}$ ).

**З а м е ч а н и е.** Эллипс с нулевым эксцентриситетом — это окружность, а с малым ( $e \approx 0$ ) — очень похож на окружность. Если расстояние фокуса от центра — первого порядка малости, то различие полуосей — второго порядка:  $b = a\sqrt{1 - e^2} \approx a(1 - \frac{1}{2}e^2)$  \*). Известно, что орбиты планет Солнечной системы являются эллипсами с очень малыми эксцентриситетами (порядка 0,001), в фокусе которых находится Солнце.

Вернемся к первому бильiardному (оптическому) свойству эллипса. Возьмем на эллипсе с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  произвольную точку  $M$  (рис. 4.4). Для любой точки  $N$  на эллипсе справедливо равенство

$$F_1N + F_2N = F_1M + F_2M,$$

а для точки  $N$ , лежащей внутри эллипса, сумма  $F_1N + F_2N$  меньше, чем  $F_1M + F_2M$ . Построим прямую  $l$ , проходящую через точку  $M$  и образующую равные углы с отрезками  $F_1M$  и  $F_2M$ :  $\angle 1 = \angle 2$ . Если теперь  $M'$  — произвольная точка прямой  $l$ , отличная от  $M$ , то

$$F_1M' + F_2M' > F_1M + F_2M,$$

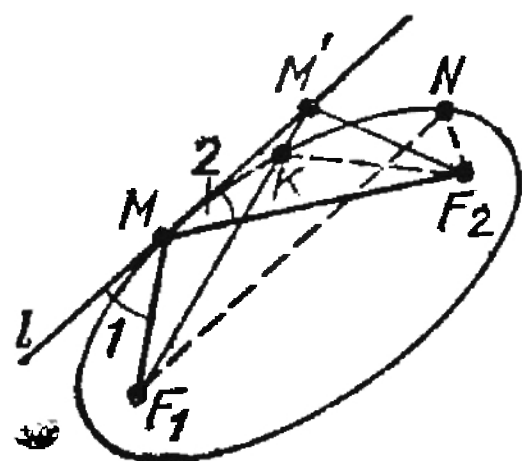


Рис. 4.4

\*) Для малых  $x$   $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ .

как это было выяснено в начале параграфа. Следовательно, точка  $M'$  лежит вне эллипса.

Мы получили, что прямая  $l$  имеет только одну общую точку с эллипсом — точку  $M$ ; все же остальные точки прямой  $l$  расположены вне эллипса. Такую прямую называют *касательной*. Таким образом, справедливо

**Утверждение 1** (первое бильярдное свойство эллипса). *Касательная к эллипсу, проведенная в его произвольной точке  $M$ , образует равные углы с отрезками  $F_1M$  и  $F_2M$ , соединяющими оба фокуса с этой точкой.*

Из первого бильярдного свойства эллипса вытекает сразу, что как бы мы ни выпустили бильярдный шар из одного фокуса, он после одного отражения от эллипса (от борта стола) пройдет через второй фокус, после второго отражения — опять через первый фокус и так далее.

Знаменитый Льюис Кэрролл написал небольшую книжку и об эллиптическом бильярдном столе. В одиннадцатом издании Британской энциклопедии в примечании к статье о бильярде написано: «В 1907 г. в Англии для разнообразия введен овальный стол». Однако ни у этого, ни у бильярдного стола Льюиса Кэрролла луз не было. Только в 1964 г. Эдвин Э. Робинсон получил патент на круглый бильярдный стол с четырьмя лузами. Тогда же в США появилась придуманная Артуром Фриго игра «Эллиптипул», в которой луза располагалась в одном из фокусов эллиптического стола. На таком столе, ударяя шары о борт, можно все время выигрывать.

Теперь мы можем дать иную интерпретацию решения задачи о нахождении точки  $M$  на прямой  $l$ , реализующей мини-

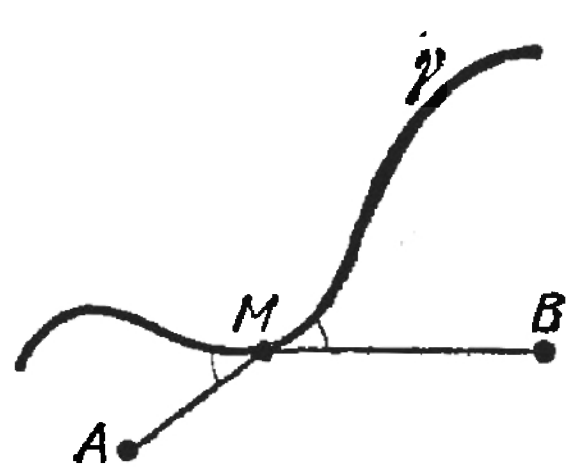


Рис. 4.5

мум суммы  $AM + BM$  для заданных точек  $A$  и  $B$  (рис. 4.1): та точка  $M$  на прямой  $l$  является искомой, в которой один из эллипсов с фокусами  $A$  и  $B$  касается этой прямой (все такие эллипсы называются софокусными).

В точности то же решение получится, если прямую  $l$  заменить произвольной кривой  $\gamma$ . Сформулируем точный вопрос.

**Вопрос.** *Дана кривая  $\gamma$  и две точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от нее (рис. 4.5). Как найти на кривой  $\gamma$  точку  $M$  такую, чтобы сумма расстояний  $AM + BM$  была (среди всех возможных) минимальной... или максимальной?*

Мы оставляем читателю возможность самому поразмыш-

лгать над этим вопросом, полный ответ на который отложим до § 6.

Остановимся немного на некоторых оптических интерпретациях первого бильярдного свойства эллипса. Предположим, что эллипс представляет собой «зеркальную» кривую, от которой луч света отражается по закону «угол падения равен углу отражения». Если в одном из фокусов такого зеркального эллипса помещен точечный источник света, то после отражения от стенок эллипса все лучи пройдут через второй фокус. Описанное явление можно

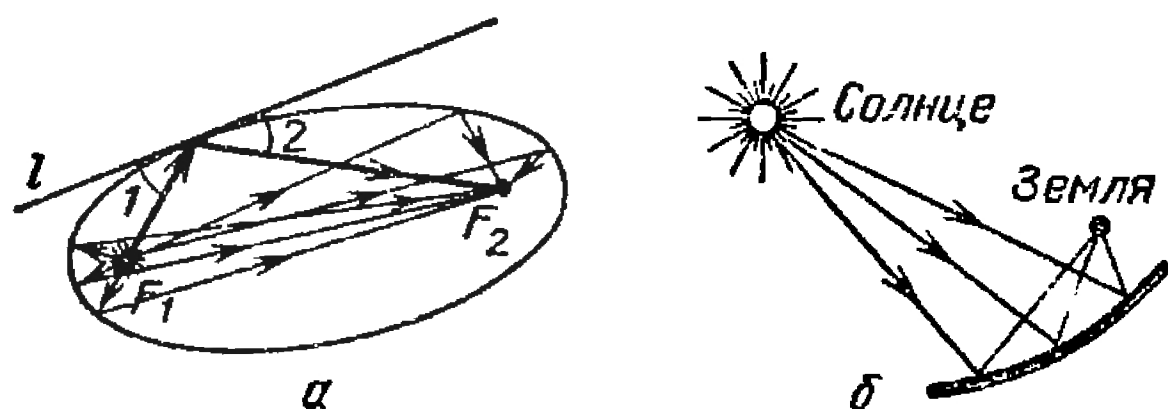


Рис. 4.6

наблюдать реально, в трехмерном пространстве. Для этого нужно взять поверхность, получающуюся вращением эллипса вокруг прямой  $F_1F_2$ , соединяющей его фокусы, — она называется *эллипсоидом вращения*, — покрыть ее изнутри зеркальным слоем, а в одном из фокусов поместить точечный источник света («солнце»). Тогда наблюдатель, находящийся внутри эллипсоида, увидит два «солнца». В самом деле, обратив взгляд к первому фокусу, наблюдатель непосредственно увидит размещенное там «солнце». Но и, посмотрев в направлении второго фокуса (где в действительности ничего нет), он также увидит «солнце» (рис. 4.6, а). И как бы ни перемещался наблюдатель внутри зеркального эллипсоида, на него почти везде будут светить два «солнца».

Но вот наблюдатель, находящийся внутри зеркального эллипсоида, решил принять меры, которые избавят его от «множества солнца», и поместил во втором фокусе небольшое непрозрачное тело («экран»), преграждающее путь отраженным лучам. Результат оказывается несколько неожиданным: теперь все лучи, исходящие от «солнца»  $F_1$ , после отражения от стенок зеркального эллипсоида собираются («фокусируются») на экране  $F_2$ , и это может вызвать интенсивный его разогрев. Например, поместив в фокус  $F_1$  горящую свечу, можно зажечь бумажку, находящуюся во втором фокусе. Заметьте, что для фокусировки не обяза-

тельно иметь целый зеркальный эллипсоид, достаточно использовать лишь часть его поверхности \*).

А что увидит «несгораемый» наблюдатель, оказавшийся во втором фокусе  $F_2$  эллипсоида, если в первый его фокус  $F_1$  поместить источник света? Все лучи, выходящие из  $F_1$  и отражающиеся от эллипсоида, попадают в точку  $F_2$ ; таким образом, для наблюдателя в  $F_2$  *весь эллипсоид будет светиться*.

Если изготовить зеркальный эллиптический отражатель, в одном из фокусов которого находится Солнце (настоящее!), а в другом — котел с водой, то можно добиться кипения воды в котле за счет сфокусированного отражателем излучения Солнца. Удивительного в этом ничего нет: ведь отражатель имеет большую площадь и со всей его поверхности солнечная энергия направляется на обогрев котла. Такие солнечные установки уже сейчас имеют некоторое применение. А в будущем может быть удастся, построив огромный зеркальный отражатель (в форме части эллипсоида, рис. 4.6, б), использовать энергию тех лучей, которые проходят мимо Земли?

Отметим еще, что фокальное свойство эллипса используется для аттракционов. В США имеются знаменитые «шепчущие галереи», которые представляют собой помещения с эллипсоидальными потолками. Наиболее известна шепчущая галерея в Скульптурном зале Капитолия, без посещения которой не обходится ни одна экскурсия. Прекрасная комната шепотов, правда меньшего размера, имеется у входа в бар в нижнем этаже Центрального вокзала в Нью-Йорке. Двое людей, стоящих там лицом к стене в диагонально противоположных углах квадратной площадки, хорошо слышат друг друга, даже когда на площадке толпятся люди \*\*). Аналогичный эффект наблюдается в Доме композиторов в Дилижане (СССР). Впервые теория эффекта «шепчущих галерей» была предложена известным физиком лордом О. Н. Рэлеем в его статье 1910 г. «Проблема шепчущей галереи» и в его классической книге «Теория звука».

**Задача 4.3.** Возьмем вырезанный из бумаги круг, поставим на нем точку  $A$  в любом месте, отличном от центра, и сложим круг так, чтобы точка  $A$  совпала с какой-либо точкой окружности. Разогнем листок и снова согнем, совместив точку  $A$  уже с другой точкой окружности. Докажите, что если этот бумажный круг

---

\*) Поэтому фокус и называется *фокусом* — по-латыни *focus* — это *очаг*.

\*\*) Отметим, что эффект «шепчущих галерей» был известен еще в древнем Китае (свидетельством чему являются остатки стен, где этот эффект хорошо проявляется).



перегибать так, чтобы его край все время проходил через точку  $A$ , то огибающая линия сгиба будет эллипсом (рис. 4.7).

**Решение.** Обозначим буквой  $O$  центр круга. Пусть круг сгибается по прямой  $XU$ ; на точку  $A$  попадает точка  $B$  края круга, при этом  $AB \perp XU$  и прямая  $XU$  делит отрезок  $AB$  пополам. Обозначим буквой  $C$  точку пересечения прямых  $XU$  и  $OB$  (рис. 4.7, б). Тогда  $AC=BC$ , поэтому  $OC+AC=OC+CB=R$ , где  $R$  — радиус окружности. Следовательно, при любом сгибе круга сумма  $OC+AC$

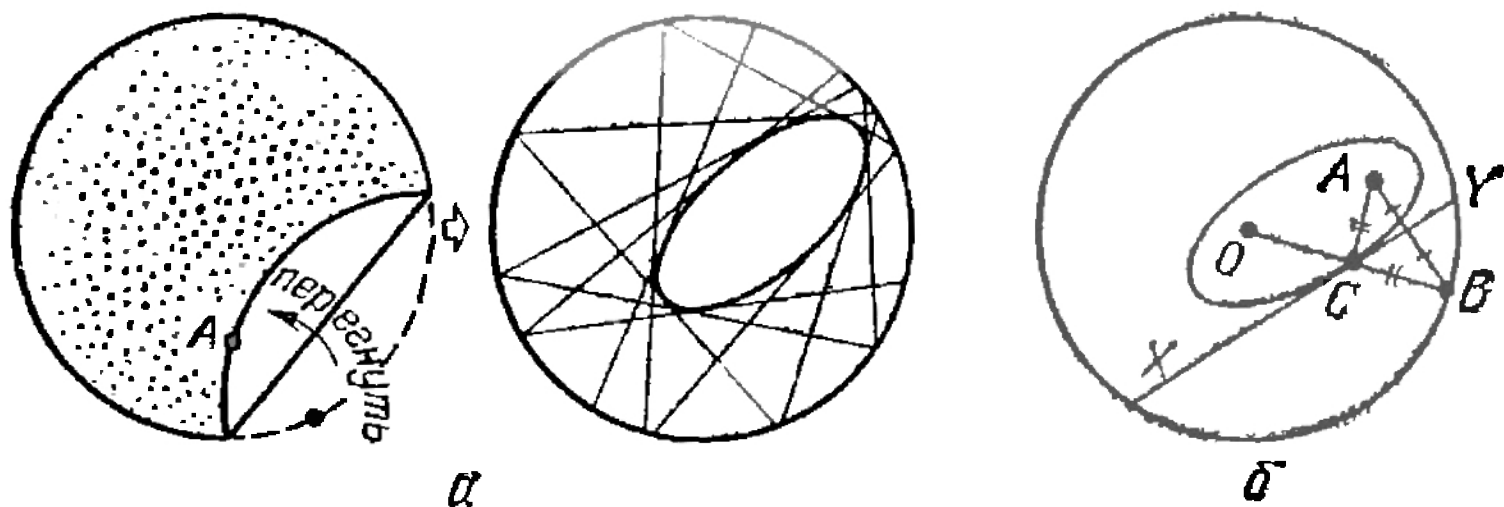


Рис. 4.7

постоянна и равна его радиусу. Следовательно, геометрическое место точек  $C$ , движущихся при перемещении точки  $B$  по окружности, является эллипсом  $\mathcal{E}$  с фокусами в точках  $A$  и  $O$ . Из биллярного свойства эллипса следует, что все линии сгиба касательны к эллипсу  $\mathcal{E}$ , поэтому он является огибающей бесконечного множества линий сгиба  $XU$ .

**Задача 4.4.** а) Докажите, что тень на столе, отбрасываемая лежащим на нем круглым мячом при его освещении точечным источником света  $S$ , является эллипсом. Где находится фокус этого эллипса?

б) Наклоните круглый цилиндрический стакан с водой под некоторым углом. Докажите, что поверхность воды примет форму эллипса.

**Решение.** Оба пункта задачи решаются одним приемом и используют свойство равенства всех общих касательных к двум заданным сферам. Приводимое доказательство предложено бельгийским математиком XIX века Ж. Данделеином в 1822 г.

а) Мяч вписан в конус с вершиной  $S$ , который пересекается с плоскостью  $\pi$  (столом) по некоторой кривой  $\gamma$ ;  $A$  — точка касания мяча с плоскостью  $\pi$ . Впишем в конус еще один шар, касающийся плоскости  $\pi$ , но с другой стороны (рис. 4.8, а) в точке  $B$ . Пусть  $M$  — произвольная точка кривой  $\gamma$ . Через точку  $M$  и вершину конуса  $S$  проведем прямую, касающуюся обоих шаров в точках  $X$  и  $Y$ . Соединим точку  $M$  с точками  $A$  и  $B$ .

Отрезки  $MA$  и  $MX$  — касательные к мячу, проведенные из одной точки, значит,  $MA=MX$ . По той же причине  $MB=MY$ . Следовательно,

$$MA+MB=MX+MY=XY,$$

причем длина отрезка  $XY$  не зависит от положения точки  $M$  на кривой  $\gamma$  —  $XY$  и есть общая касательная к двум шарам! Итак,  $MA+MB=\text{const}$ , поэтому  $\gamma$  — эллипс, что и требовалось доказать. Фокусами эллипса  $\gamma$  являются точки  $A$  и  $B$ . в частности мяч касается стола в фокусе отбрасываемой им тени.

б) Решение этой задачи почти дословно копирует решение задачи а. Действительно, если граница поверхности воды есть кривая  $\gamma$  (рис. 4.8, б), то два вписанных в цилиндрический стакан шара, касающиеся поверхности воды в точках  $A$  и  $B$ , обладают тем свойством, что для любой точки  $M \in \gamma$  справедливо равенство

$$MA + MB = MX + MY = XY,$$

где  $XY$  — общая касательная к этим шарам, длина которой не зависит от выбора точки  $M$  на  $\gamma$ . Следовательно, *поверхность воды*

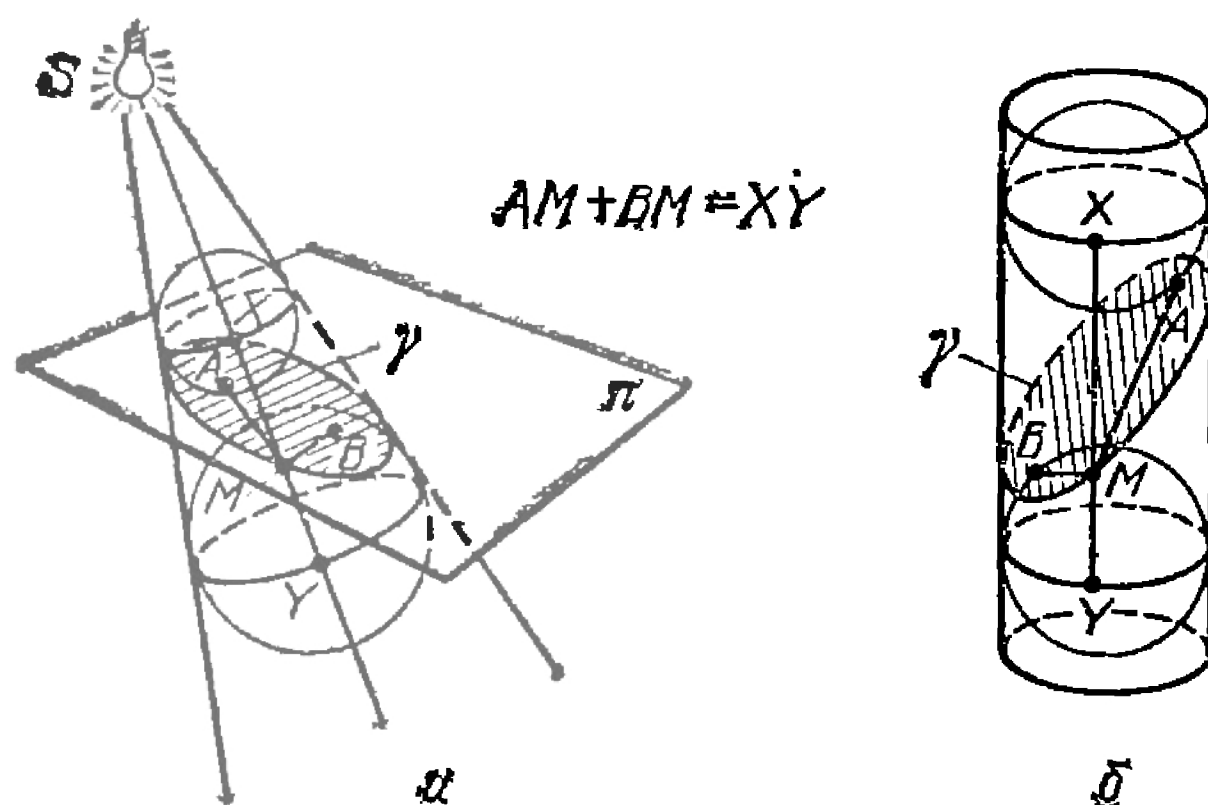


Рис. 4.8

в стакане действительно имеет форму эллипса с фокусами в точках  $A$  и  $B$ .

Используемые при доказательстве сферы называются *сферами Данделена*.

Теперь мы, основываясь на имеющихся знаниях геометрических свойств эллипса, получим некоторые другие бильярдные свойства эллипса.

**Утверждение 2** (второе бильярдное свойство эллипса). *Звенья траектории бильярдного шара, выпущенного из произвольного фокуса эллипса, асимптотически (в пределе) стремятся к большой оси эллипса, т. е. после некоторого числа ударов о борт движение шара будет происходить в сколь угодно малой полосе, содержащей большую ось эллипса (рис. 4.9).*

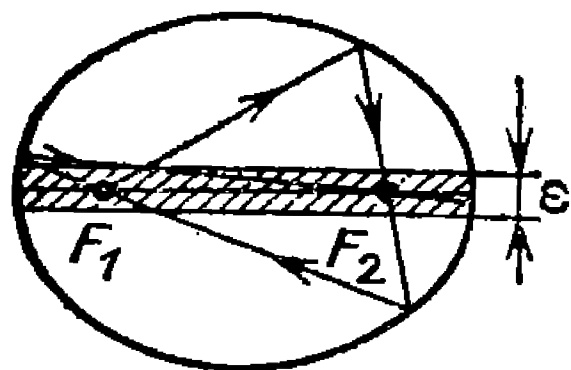


Рис. 4.9

**Доказательство** можно проводить по-разному, например вычислить, как меняется расстояние от точек ударов шара об эллипс до его большой оси и доказать затем, что оно уменьшается быстрее, чем некоторая убывающая геометрическая прогрессия; или же доказать аналогичное

утверждение для углов, образуемых звеньями траектории с большой осью эллипса. Эти доказательства весьма громоздки и желающие могут попробовать свои силы на их самостоятельном поиске. В качестве «подсказки» может служить указание к задаче 4.5.

Мы же поступим по-другому, не используя при доказательстве никаких формул, а используя только достаточно простые, но одновременно изящные рассуждения.

Пусть  $A_1, B_1$  и  $A_2$  — три последовательные точки ударов шара о борт, причем  $A_1$  и  $A_2$  лежат на верхней половине эллипса, а  $B_1$  — на нижней (рис. 4.10). Тогда, как легко

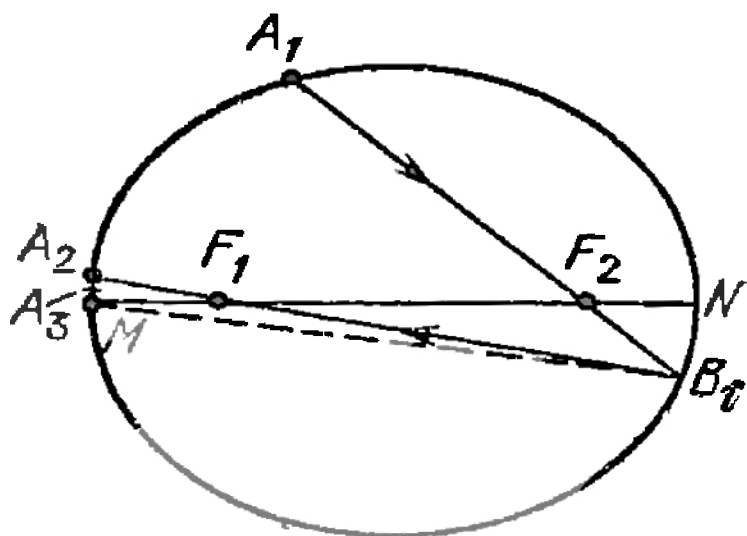


Рис. 4.10

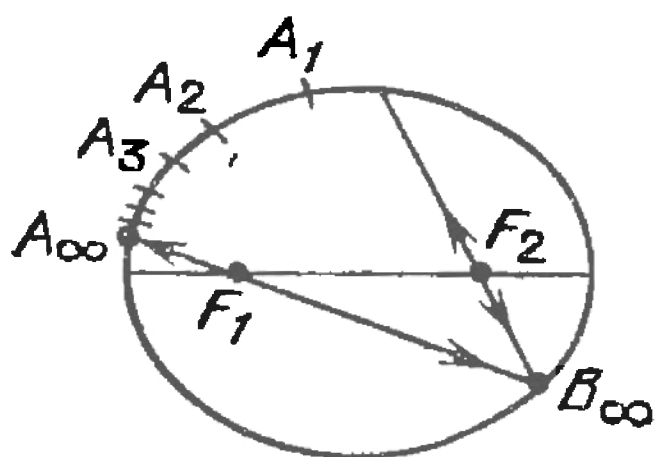


Рис. 4.11

видеть, точка  $A_2$  лежит ниже точки  $A_1$ , т. е. ближе к большой оси, поскольку  $\angle A_1 B_1 A_2$  целиком содержится в  $\angle A B_1 M$  ( $M$  — левый конец большой оси эллипса).

Дальнейшие точки ударов об эллипс будем обозначать  $B_2, A_3, B_3, A_4, \dots$ , причем все точки  $B_k$  располагаются ниже большой оси эллипса, а все  $A_k$  — выше нее. При этом каждая следующая точка  $A_k$  будет находиться ниже предыдущей  $A_{k-1}$  (поскольку  $A_k$  лежит на дуге эллипса  $A_{k-1}M$ ), и выше точки  $M$  — левого конца большой оси. Докажем, что при  $k \rightarrow \infty$  точка  $A_k$  стремится к точке  $M$ , — это и будет доказывать утверждение 2.

Предположим, однако, что предельной точкой для последовательности  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$  является не точка  $M$ , а некоторая другая точка, которую обозначим  $A_\infty$ ; тогда  $A_\infty$  лежит выше большой оси (рис. 4.11). Это означает, что все звенья траектории  $B_{k-1}A_k$  с достаточно большими номерами  $k$  сколь угодно близко подходят к отрезку  $B_\infty A_\infty$ , где точка  $B_\infty$  лежит на нижней половине эллипса и является пересечением прямой  $A_\infty F_1$  с эллипсом.

Что же произойдет, если бильярдный шар будет выпущен из точки  $B_\infty$  в точку  $A_\infty$ ?

Очевидно, если вся рассматриваемая нами траектория сколь угодно близко подходила к отрезку  $A_\infty B_\infty$ , то теперь,

двигаясь из  $B_\infty$  в  $A_\infty$ , шар должен отразиться от эллипса в точке  $A_\infty$  и пойти в точности по тому же отрезку  $A_\infty B_\infty$ , но в обратном направлении — от  $A_\infty$  к  $B_\infty$ ! Однако при этом шар непременно должен пройти опять через фокус  $F_1$ , поскольку он лежит на отрезке  $A_\infty B_\infty$ , хотя по первому бильярдному свойству эллипса шар после отражения в точке  $A_\infty$  пойдет по прямой  $A_\infty F_2$  — через второй фокус. Полученное противоречие доказывает, что  $A_\infty$  и  $M$  должны совпадать: предельное движение шара должно происходить в сколь угодно малой окрестности большой оси.

**З а м е ч а н и е.** В математических рассуждениях часто используется приведенный выше прием: для некоторого множества  $\{A_n\}$  состояний произвольной системы, имеющего предельное состояние  $A_\infty$ , рассматривается это предельное состояние системы  $A_\infty$  и затем исследуются его свойства, которые во многих случаях близки к свойствам допредельных состояний системы  $A_n, A_{n+1}, \dots$ . Зная эти свойства, можно делать соответствующие выводы о поведении системы в целом.

**В о п р о с.** Обратим движение шара, выпущенного из фокуса: звенья его траектории, близкие к большой оси эллипса, начнут удаляться от большой оси. Не противоречит ли это утверждению 2?

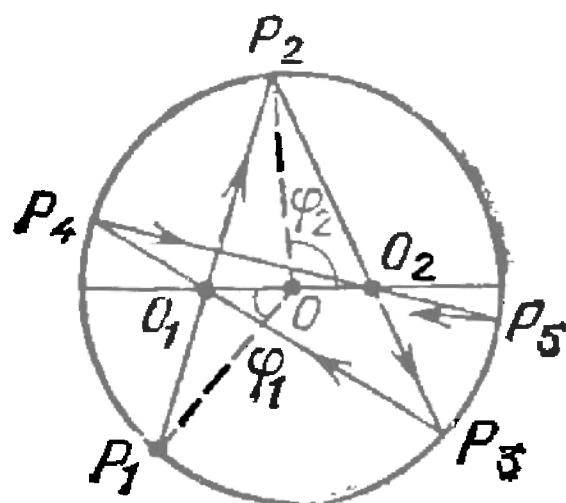


Рис. 4.12

**З а д а ч а 4.5.** На горизонтальном диаметре окружности с центром  $O$  выбраны точки  $O_1$  и  $O_2$ , равноудаленные от  $O$  (рис. 4.12). Для произвольной выбранной точки  $P_1$  на окружности строятся точки  $P_2, P_3, P_4, \dots$ , такие, что хорды  $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots$  попеременно проходят через точки  $O_1$  и  $O_2$ . Доказать, что положение хорды  $P_nP_{n+1}$  при  $n \rightarrow \infty$  стремится к горизонтальному диаметру.

**У к а з а н и е.** Можно провести рассуждения, аналогичные проводимым при доказательстве утверждения 2. Но можно, введя обозначения  $\angle P_1OO_1 = \varphi_1, \angle P_2OO_2 = \varphi_2$ , доказать, что  $\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}$ , где  $e = O_1O/R, R$  — радиус окружности. Аналогично вводятся углы  $\varphi_3 = \angle P_3OO_1, \varphi_4 = \angle P_4OO_2$  и т. д., для которых выполняются те же соотношения

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2} = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi_4}{2} = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}, \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, последовательность  $\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}, \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}, \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}, \dots$  образует бесконечную геометрическую прогрессию со знаменателем  $\frac{1-e}{1+e}$ .

а потому ее общий член стремится к 0. Следовательно,  $\varphi_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. траектория стремится к горизонтальному отрезку.

Прежде чем перейти к третьему бильярдному свойству эллипса, введем в рассмотрение еще одну кривую, тесно связанную с эллипсом. Эта кривая называется *гиперболой*.

**О п р е д е л е н и е.** Гиперболой называется множество точек  $M$  на плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек  $F_1$  и  $F_2$  — фокусов гиперболы — величина постоянная (рис. 4.13):

$$|MF_1 - MF_2| = \text{const.}$$

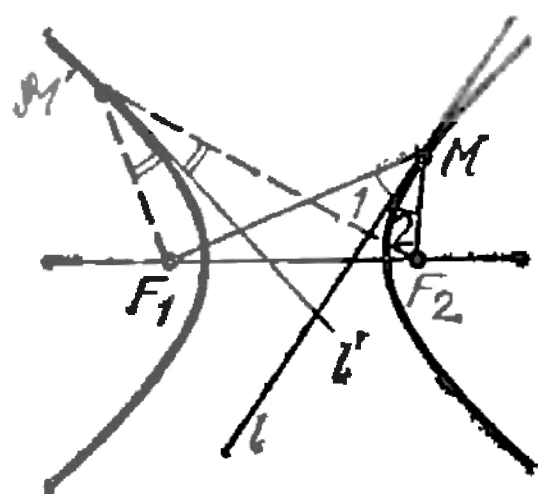


Рис. 4.13

Гипербола состоит из двух «кусков», называемых ее *ветвями*. Как и для эллипса, для гиперболы имеет место

**О п т и ч е с к о е с в о й с т в о.** Касательная  $l$  в произвольной точке  $M$  гиперболы является биссектрисой угла  $\angle F_1MF_2$ :  $\angle 1 = \angle 2$  (рис. 4.13).

**З а д а ч а 4.6.** Докажите справедливость оптического свойства гиперболы.

**У к а з а н и е.** Решите задачу о нахождении на прямой  $l$  такой точки, для которой разность расстояний от двух заданных точек  $A, B$  наибольшая.

Мы приведем еще один способ доказательства оптического свойства гиперболы. Возьмем на гиперболе две очень

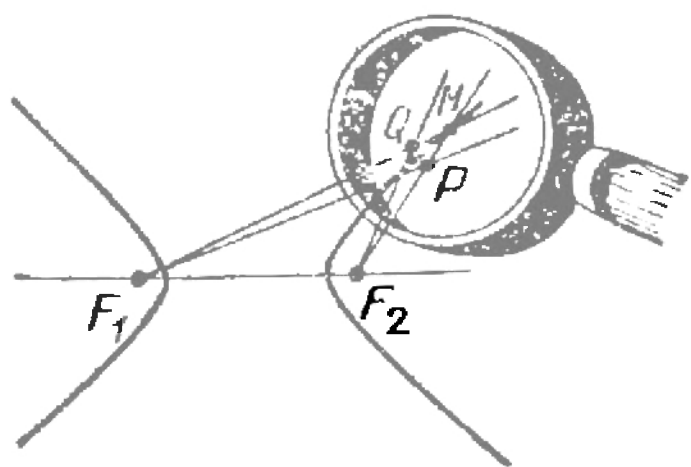


Рис. 4.14

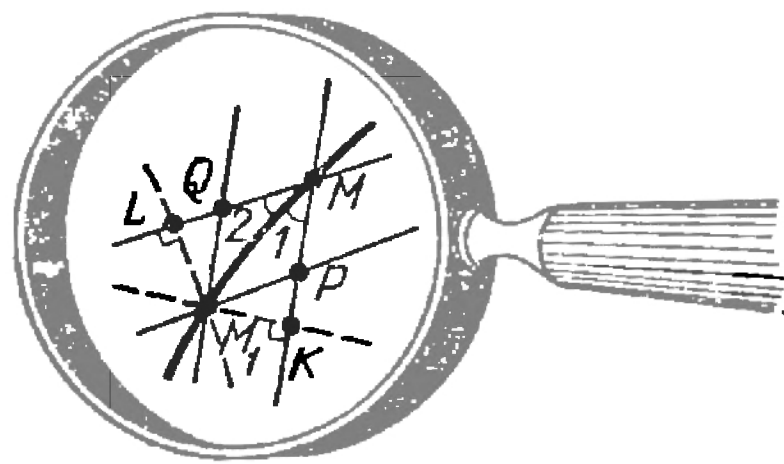


Рис. 4.15

близкие точки  $M$  и  $M_1$  (рис. 4.14), и пусть  $P$  — точка пересечения прямых  $F_1M_1$  и  $F_2M$ , а  $Q$  — точка пересечения прямых  $F_2M_1$  и  $F_1M$ . Посмотрим теперь «через лупу» на четырехугольник  $M_1PMQ$  (рис. 4.15). Мы можем считать (приблизительно), что  $PM_1 \parallel MQ$  и  $PM \parallel M_1Q$ , так как точки  $F_1$  и  $F_2$  находятся очень далеко — сравнительно с размерами четырехугольника  $M_1PMQ$ . Итак, будем считать (прибли-

и, следовательно, что  $M_1PMQ$  — параллелограмм. Проведем теперь окружности с центрами  $F_1$  и  $F_2$ , проходящие через точку  $M_1$ . Вблизи рассматриваемого параллелограмма (см. рис. 4.15) дуги этих окружностей будут представляться прямыми  $M_1L$  и  $M_1K$ , перпендикулярными сторонам параллелограмма и поэтому

$$\begin{aligned} F_1M - F_2M &= (F_1L + LM) - (F_2K + KM) = \\ &= (F_1M_1 + LM) - (F_2M_1 + KM) = (F_1M_1 - F_2M_1) + (LM - KM). \end{aligned}$$

Но так как  $F_1M - F_2M = F_1M_1 - F_2M_1$  ( $M$  и  $M_1$  лежат на одной ветви гиперболы), то  $LM = KM$ . А тогда прямоугольные треугольники  $\triangle KMM_1$  и  $\triangle LMM_1$  равны (по гипотенузе и катету) и, следовательно,  $\angle 1 = \angle 2$ . Это и завершает доказательство оптического свойства гиперболы (для того чтобы это «приближенное» рассуждение сделать точным, нужно еще перейти к пределу при  $M_1 \rightarrow M$ ).

**З а м е ч а н и е.** Для гиперболы оптическое свойство можно сформулировать еще и так: *лучи, выходящие из одного фокуса, отражаясь от гиперболы, будут расходиться*

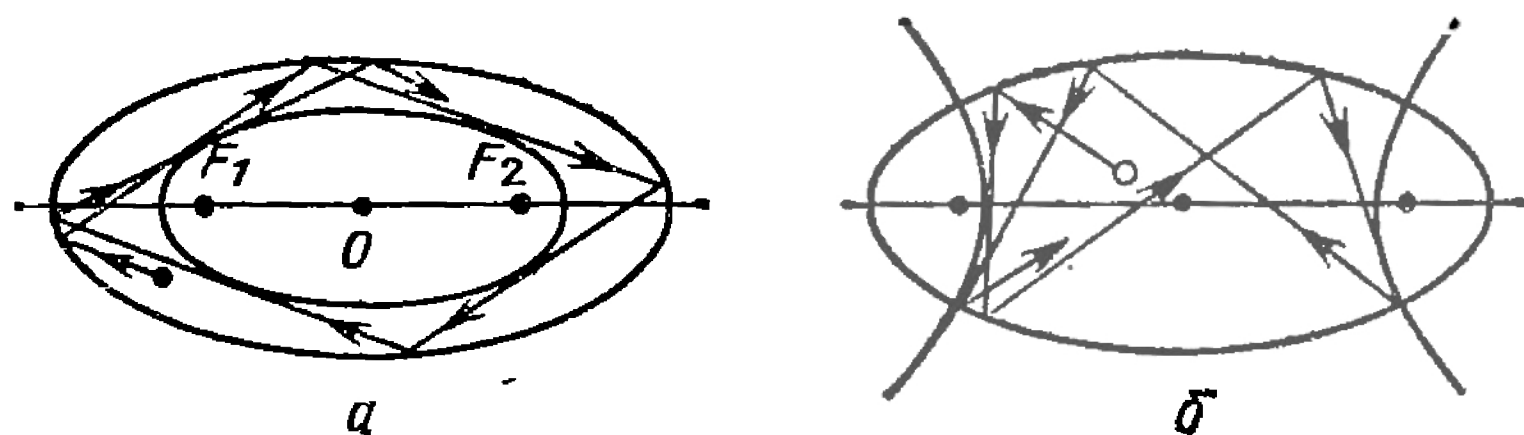


Рис. 4.16

таким образом, что кажутся выходящими из второго фокуса.

**У т в е р ж д е н и е 3** (третье бильярдное свойство эллипса). Любая бильярдная траектория в эллипсе касается либо эллипса, либо гиперболы, софокусных (т. е. с теми же фокусами) с данным эллипсом. Первый случай реализуется, когда первое (а тем самым и произвольное) звено траектории не пересекает отрезка фокусов, а второй случай — когда первое (а тем самым и произвольное) звено траектории отрезок фокусов пересекает. При этом во втором случае соответствующие точки касания могут лежать не на самих звеньях ломаной, а на их продолжениях (рис. 4.16).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $A_1A$  и  $AA_2$  — два последовательных звена бильярдной траектории в эллипсе, причем отрезок  $A_1A$  не пересекает отрезка фокусов  $F_1F_2$ .



(рис. 4.17). Из первого бильярдного свойства эллипса следует, что  $\angle A_1AF_1 = \angle A_2AF_2$ , поэтому отрезок  $AA_2$  также не пересекает отрезка фокусов  $F_1F_2$ .

Возьмем точку  $B_1$ , симметричную  $F_1$  относительно  $A_1A$  и проведем отрезок  $B_1F_2$ . Он пересечет  $A_1A$  в точке  $C_1$ ; при этом  $u_1 = F_1C_1 + C_1F_2 = B_1C_1 + C_1F_2 = B_1F_2$ , а для всякой точки  $D$  на отрезке  $A_1A$ , отличной от  $C_1$ , выполнено неравенство  $u_1 = F_1C_1 + C_1F_2 < F_1D + DF_2$ .

Отсюда следует, что эллипс, софокусный с исходным, для которого сумма расстояний до  $F_1$  и  $F_2$  равна  $u_1$ , касается  $A_1A$  и притом в точке  $C_1$ . Аналогичное построение сделаем с отрезком  $AA_2$  (рис. 4.17), найдем точку  $C_2$  и величину  $u_2 = F_1C_2 + C_2F_2$ . Таким образом, точка  $C_2$  лежит на софокусном эллипсе с  $\text{const} = u_2$ , касающемся отрезка  $AA_2$ .

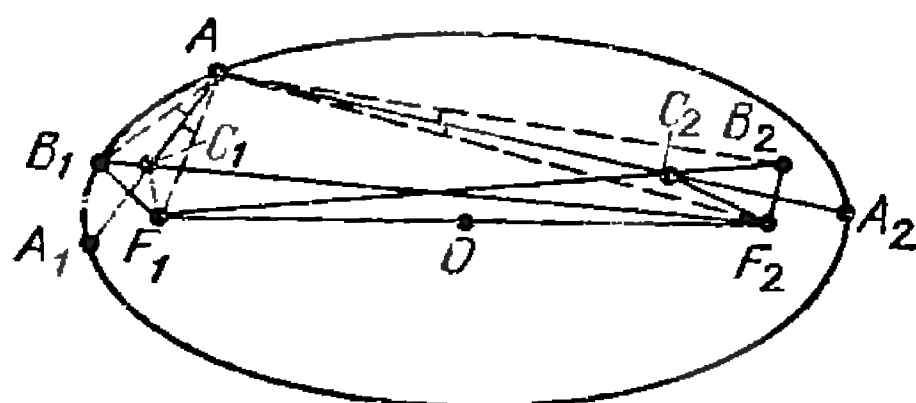


Рис. 4.17

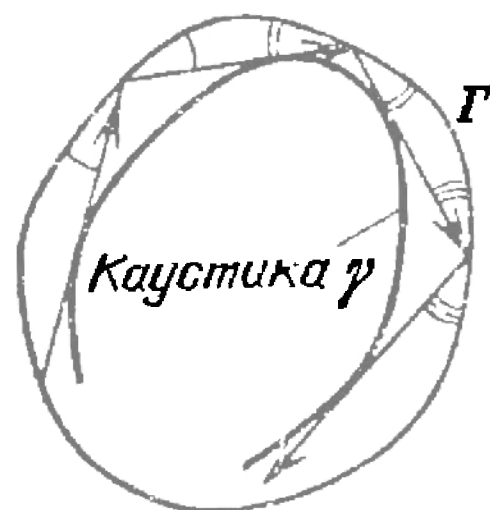


Рис. 4.18

Докажем, что точки  $C_1$  и  $C_2$  лежат на одном и том же эллипсе, т. е. докажем, что  $u_1 = u_2$ . Для этого заметим, что  $\triangle B_1AF_2 = \triangle B_2AF_1$  (по двум сторонам и углу между ними — с вершиной  $A$ ), откуда  $B_1F_2 = B_2F_1$ , т. е.  $u_1 = u_2$ , что и требовалось. Игак, отрезки  $A_1A$  и  $AA_2$  касаются одного софокусного эллипса с константой  $u = B_1F_2 = B_2F_1$ .

Случай гиперболы рассматривается аналогично (разберите его самостоятельно) — он возникает, когда отрезок  $A_1A$  пересекается с отрезком  $F_1F_2$  и  $\angle A_1AA_2$  лежит внутри  $\angle F_1AF_2$ . Утверждение 3 доказано.

Третье бильярдное свойство эллипса позволяет ввести понятие *каустической кривой*, сокращенно *каустики*.

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $Q$  — произвольная выпуклая область на плоскости, ограниченная кривой  $\Gamma$ , в которой бильярдный шар описывает траекторию  $\dots P_{-1}P_0P_1\dots$ . Кривая  $\gamma$ , лежащая внутри области  $Q$ , называется *каустикой*, если выполнено следующее условие: из того, что хотя бы одно звено  $P_kP_{k+1}$  траектории бильярда  $\dots P_{-1}P_0P_1\dots$  касается  $\gamma$ , следует, что все остальные звенья этой траектории также касаются кривой  $\gamma$  (рис. 4.18). Иными сло-

вами, траектория бильярдного шара после каждого отражения касается кривой  $\gamma$  — каустики бильярда  $Q$ .

Простейшим примером каустики может служить окружность, которой касается траектория бильярдного шара в круге. В круглом бильярде имеется только одно семейство каустик — концентрические окружности.

Третье бильярдное свойство эллипса состоит в том, что у эллиптического бильярда  $Q$  существует два семейства каустик: это эллипсы  $\Gamma_c$  и гиперболы  $H_c$ , софокусные с  $\Gamma$  — границей  $Q$ .

Оказывается, что все выпуклые области  $Q$  с достаточно гладкой границей  $\Gamma$  (т. е. такой, в каждой точке которой можно провести касательную, причем в близких точках

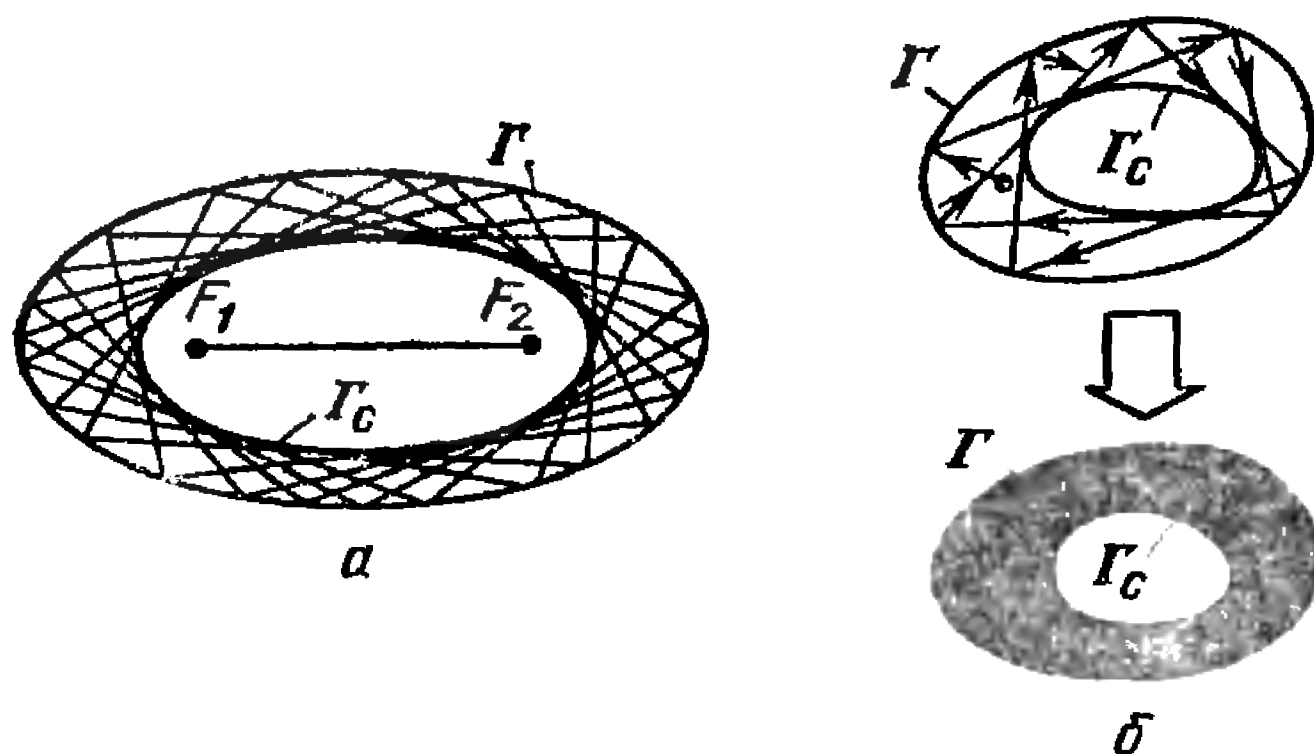


Рис. 4.19

границы  $\Gamma$  эти касательные образуют друг с другом малый угол) имеют бесконечно много каустик, накапливающихся к границе  $\Gamma$  (этот сложный результат установлен В. Ф. Лазуткиным). Отсюда вытекает, что бильярд в области  $Q$  на плоскости, ограниченной гладкой выпуклой кривой  $\Gamma$ , не эргодичен (напомним, что в случае эргодичности шар проводит в каждом кружочке внутри области  $Q$  время, пропорциональное его площади; в нашем же случае есть участки области  $Q$ , куда шар вообще не попадает). Например, бильярдная траектория шара в эллипсе, не пересекающая отрезка фокусов, может, самое большее, заполнить всюду плотно кольцо между софокусными эллипсами  $\Gamma$  (внешняя граница кольца) и  $\Gamma_c$  (внутренняя граница кольца), но никогда не попадет внутрь области, ограниченной эллипсом (рис. 4.19,  $a$ ). Более того, если  $Q$  — произвольная область (а не только эллипс),  $\Gamma$  — его граница, а  $\Gamma_c$  — какая-то каустика в  $Q$ , то почти любая непериодическая бильярдная

траектория, касающаяся каустики  $\Gamma_c$ , всюду плотно заполняет область между бортом бильярда  $\Gamma$  и этой каустикой («кривое кольцо»; рис. 4.19, б) \*).

Более прост такой факт, замеченный В. Б. Минаяном. Оказывается, если задана выпуклая кривая  $\gamma$  и требуется найти все кривые  $\Gamma$ , для которых  $\gamma$  является каустикой, то их можно получить следующим образом. Обозначим  $l(\gamma)$  длину кривой  $\gamma$  и зафиксируем число  $s$ , превосходящее  $l(\gamma)$ . Тогда  $\Gamma = \Gamma_s$  состоит из следующего множества точек  $A$ : если из  $A$  провести касательные отрезки к  $\gamma$ , найти сумму длин этих отрезков и части кривой  $\gamma$ , заключенной между их концами, то эта сумма будет постоянной и равной  $s$  (рис. 4.20). Указанный факт объясняется следующим образом.

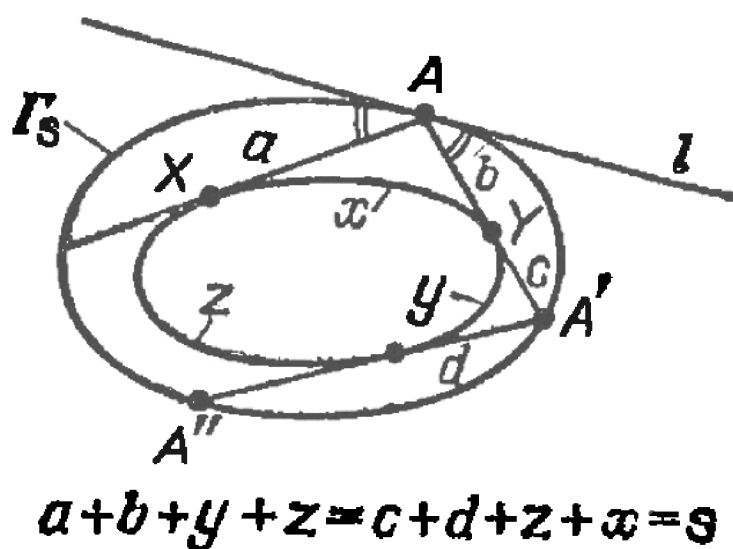


Рис. 4.20

Если мы накинем на кривую  $\gamma$  веревочную петлю длины  $s$ ,  $s > l(\gamma)$ , и натянем ее в точке  $A$ , то две касательные  $AX$  и  $AY$  из точки  $A$  к кривой  $\gamma$  вместе с оставшейся частью веревки между точками касания  $X$  и  $Y$ , плотно обтягивающей  $\gamma$ , в сумме дадут  $s$ . Проведя через точку  $A$  прямую  $l$ , образующую равные углы с отрезками  $XA$  и  $YA$ , видим, что, в силу выпуклости кривой  $\gamma$ , при малом перемещении влево или вправо веревочной петли в натянутом состоянии точка  $A$  сходится с прямой  $l$  и оказывается в той же полуплоскости относительно прямой  $l$ , в которой расположена вся кривая  $\gamma$ . Это и означает, что точка  $A$  перемещается также по выпуклой кривой  $\Gamma$ , а поэтому прямая  $l$  является касательной к  $\Gamma$  в точке  $A$ . Следовательно,  $XA$  и  $AY$  — два последовательных звена бильярдной траектории внутри кривой  $\Gamma$ , касающиеся кривой  $\gamma$ . Таким образом,

\*) Доказательство этого факта довольно просто, но не совсем элементарно. Достаточно доказать, что множество точек отражений типичной бильярдной траектории всюду плотно на внешней границе  $\Gamma$ , а дальше действовать, как и в случае круглого бильярда. Оказывается, кривую  $\Gamma$  можно отобразить взаимно однозначно и взаимно непрерывно на окружность так, что последовательные точки отражения бильярдной траектории перейдут в равноотстоящие точки на окружности (это утверждение носит в математике, в более общей формулировке, название «теорема Данжуа»). Если множество точек на окружности всюду плотно ее заполняет, то и множество образов — точек излома рассматриваемой бильярдной траектории на кривой  $\Gamma$  — заполняет кривую  $\Gamma$  также всюду плотно.

$\gamma$  действительно каустика для бильярда внутри области, ограниченной полученной кривой  $\Gamma$ .

Подведем итог полученным сведениям о траекториях эллиптического бильярда (правда, не все факты нами доказаны). Бильярдная траектория в эллипсе *либо периодическая* (замкнутая — к этим траекториям относятся и две оси эллипса), *либо непериодическая*. Во втором случае выделяются траектории, звенья которых поочередно проходят через фокусы — их поведение описывается вторым

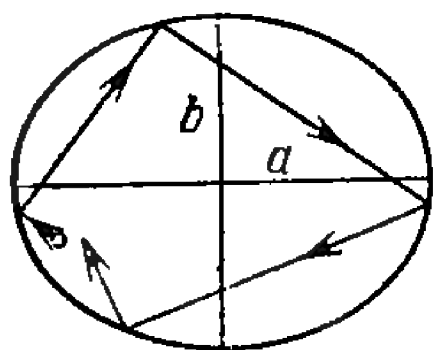
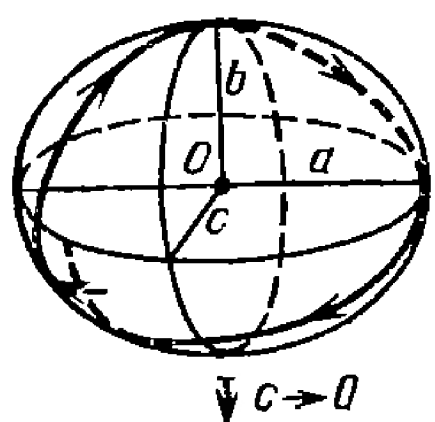


Рис. 4.21

бильярдным свойством. Остальные непериодические траектории всюду плотно заполняют либо кольцо между эллипсами  $\Gamma$  и  $\Gamma_c$ , либо область между двумя ветвями софокусной гиперболы  $H_c$  (именно всюду плотность мы и не доказали).

В заключение параграфа укажем на интересную связь между бильярдом в эллипсе и свободным движением материальной точки на поверхности эллипсоида. Движение частицы на эллипсоиде происходит по кратчайшей кривой — так называемой *геодезической*. Будем устремлять малую ось эллипсоида к нулю; тогда эллипсоид в пределе превратится в эллипс, а траектория частицы по геодезической на эллипсоиде — в бильярдную траекторию в этом эллипсе (рис. 4.21). При этом разумно считать, что эллипс двусторонний и при каждом отражении бильярдная траектория переходит с одной стороны эллипса на другую, двигаясь прямолинейно (по геодезической).

Эта идея сведения бильярдной задачи к задаче про геодезические на «раздутом» бильярде, и обратно — задачи про геодезические к бильярдной — играет большую роль при исследовании динамики бильярда для областей, отличных от внутренней эллипса, и является мостиком, связывающим теорию динамических систем с дифференциальной геометрией.

Читателям, которым нравятся физико-математические парадоксы, предлагаем в завершение «эллиптической» темы подумать над следующим парадоксом, на первый взгляд опровергающим второе начало термодинамики: в теплоизолированной системе тел *н е м о ж е т* происходить передачи тепла от тела более холодного (или той же температуры) к телу более горячему.

К парадоксу приводит построение такой теплоизолированной системы, в которой, напротив, одно из тел с первоначально одинаковой температурой начинает остывать, а второе — нагреваться. Рассмотрим конструкцию, показанную на рис. 4.22 и состоящую из двух зеркальных половин ( $BC$  и  $AD$ ) двух софокусных эллипсов и соединяющих их прямолинейных зеркальных перегородок  $AB$  и  $CD$  ( $A$  и  $D$  — концы малой полуоси внешнего эллипса,  $B$  и  $C$  — внутреннего). В фокусах  $F_1$ ,  $F_2$  помещены два точечных источника тепла, первоначально имеющие равные температуры; зеркальные стенки конструкции отражают все лучи (без какого-либо поглощения). Согласно первому бильярдному свойству эллипса, все тепловые лучи, выходящие из источника  $F_1$ , частью отразившись от стенки  $BC$ , частью — от стенки  $AD$ , попадают в точку  $F_2$ . Если бы все тепловые лучи, исходящие из второго источника  $F_2$ , попадали бы в точку  $F_1$ , то тогда оба источника не меняли бы со временем свою температуру.

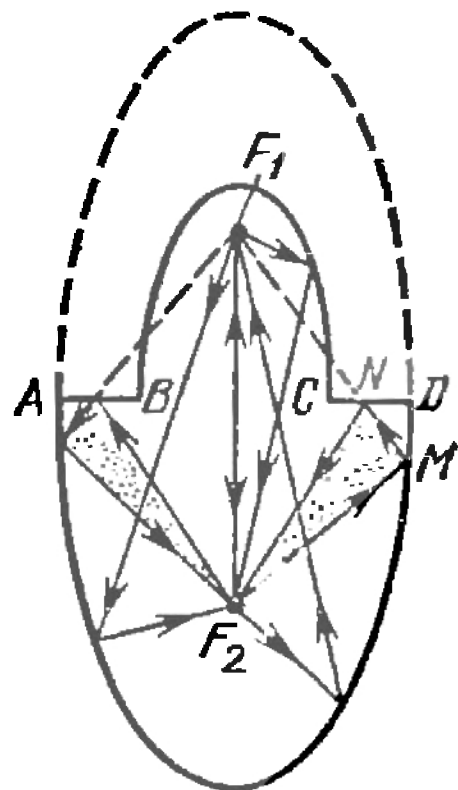


Рис. 4.22

Однако не все лучи из  $F_2$  попадают в  $F_1$ . На рис. 4.22 изображена одна из траекторий луча  $F_2MNF_2$ , который после отражения в точке  $M$  внешнего эллипса попадает в перегородку  $DC$  (двигаясь при этом в направлении фокуса  $F_1$ ), отражается от нее в точке  $N$  и ... попадает снова в  $F_2$ ! То же самое происходит и с лучами, попадающими сначала в перегородку, отражающимися от нее и после второго отражения от внешнего эллипса снова попадающими в  $F_2$  (на рис. 4.22 изображена одна из траекторий, отражающаяся от перегородки  $AB$ ).

В результате тело  $F_2$  получает, кроме лучей от тела  $F_1$ , часть своих собственных лучей, и поэтому начинает нагреваться; тело же  $F_1$  остывает. Налицо явное нарушение второго начала термодинамики. В чем же дело? (В качестве указания к разгадке парадокса предлагаем читателю заменить точечные источники  $F_1$  и  $F_2$  маленькими кружками и посмотреть, как проходят отраженные лучи вблизи фокусов).

## § 5\*. Задача об освещении невыпуклой области

Простые геометрические свойства эллипса, описанные в предыдущем параграфе, могут быть использованы при исследовании следующего вопроса: *каким наименьшим количеством точечных источников света (лампочек) можно осветить внутренность ограниченной области  $\Omega$  на плоскости?* Граница  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  представляет собой

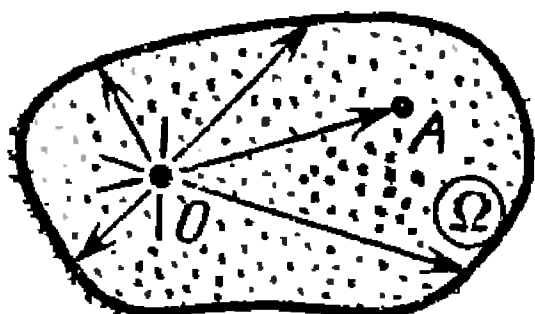


Рис. 5.1



Рис. 5.2

замкнутую несамопересекающуюся кривую  $L$  на плоскости; таким образом, двигаясь по кривой  $L$ , мы будем оставлять область  $\Omega$  все время по одну сторону от  $L$ .

Конечно же, если область  $\Omega$  является выпуклой (т. е. с любыми двумя ее точками  $A, B$  весь отрезок  $AB$  принадлежит области), то достаточно одной лампочки, которую можно поместить в произвольном месте (рис. 5.1). Действительно, если  $O$  — лампочка, а  $A$  — произвольная точка области  $\Omega$ , то луч  $OA$  освещает точку  $A$ ; таким образом, все точки области  $\Omega$  освещены лампочкой  $O$ .

А если область  $\Omega$  не выпукла? Тогда одной лампочки для освещения области может уже не хватить: на рис. 5.2

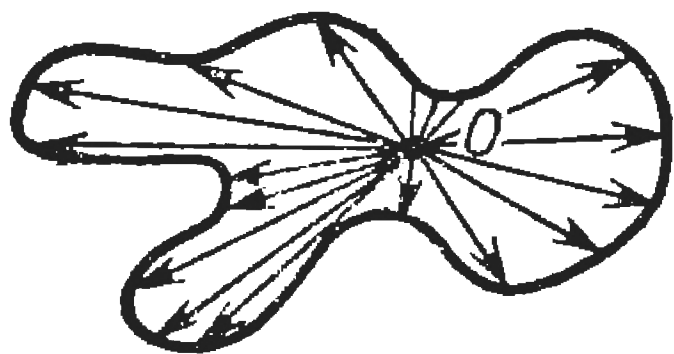


Рис. 5.3

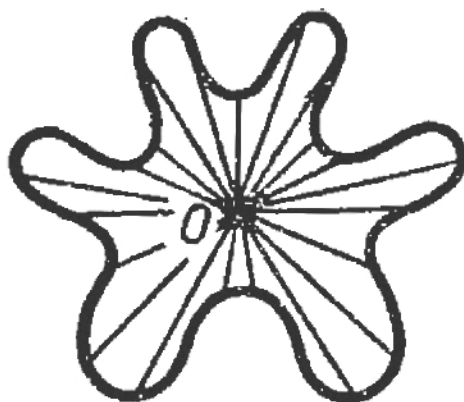


Рис. 5.4

лампочка  $O$  не освещает ни одной точки  $A$ , лежащей в заштрихованной области. Впрочем, на рис. 5.2 мы просто неудачно выбрали местоположение для лампочки: точка на рис. 5.3 уже выбрана более удачно, и лампочка  $O$  освещает всю область  $\Omega$ .

Если область  $\Omega$  содержит такую точку  $O$ , из которой «видны» все остальные ее точки (как, например, области



на рис. 5.3 и 5.4), то область  $\Omega$  называют *звездчатой*, а точку  $O$  — «точкой видимости». К звездчатым областям относятся, в частности, все выпуклые фигуры. Ясно, что *любую звездчатую область можно осветить одной лампочкой* (где ее следует поместить?).

Предположим теперь, что  $\Omega$  — не звездчатая область: никакая ее точка  $O$  не является «точкой видимости». Тогда одна лампочка, в какое бы место области мы ее не поместили, *полностью ее не осветит*; для освещения  $\Omega$  нужно больше одной лампочки. Можно предположить, что для освещения хватит *конечного* числа лампочек, как бы сложно ни была устроена область  $\Omega$ , лишь бы только ее граница  $L = \partial\Omega$  не имела точек излома, или, как говорят, была достаточно гладкой. Это подтверждается строгой теоремой, которую мы приведем в конце этого параграфа; в ней даются необходимые и достаточные условия на структуру границы. Эти условия в математике коротко называются *условиями гладкости границы*.

Пока что нами ничего не было сказано о бильярдных свойствах области  $\Omega$  и о связи сформулированного вопроса об освещении с бильярдами.

Мы уже знаем, что движение луча света при отражении от границы области осуществляется по бильiardному закону «углы падения и отражения равны». Поэтому, чтобы поставленный вопрос об освещении приобрел новое звучание, будем считать, что *граница области  $\Omega$  — зеркальная, и любой луч света при попадании на границу отражается от нее по бильiardному закону*. При такой постановке рассматриваемая задача, с одной стороны, должна, по-видимому, упроститься, поскольку многие невыпуклые области, границы которых раньше «поглощали» свет и которые не могли быть освещены одной лампочкой, теперь, обладая зеркальной границей, позволяют лучам проникать в «запретные» зоны и освещать их; а, с другой стороны, задача должна усложниться, так как теперь мы вынуждены следить за всем бесконечным ходом каждого луча, исходящего из точечного источника.

Итак, считая с этого момента и до конца параграфа область  $\Omega$  зеркальной, попробуем дать предварительный, гипотетический ответ на исходный вопрос.

**Ответ 1.** *Для освещения любой ограниченной области  $\Omega$  достаточно одной лампочки.*

Обсудим этот ответ. Мы дали его в надежде на то, что некоторый луч, выпущенный из лампочки, рано или поздно, после многократных отражений от границы, попадет

в наперед заданную точку области. Например, если  $\Omega$  — невыпуклый многоугольник (рис. 5.5), то лучи, выпущенные из произвольного точечного источника  $O$  внутри него, полностью осветят этот многоугольник, как бы «хитро» ни была устроена его граница. Это утверждение про многоугольник все специалисты-математики, занимающиеся бильярдными проблемами, считают справедливым, хотя строго оно до сих пор не доказано. (Некоторые вопросы, связанные с бильярдами в многоугольниках, приводят

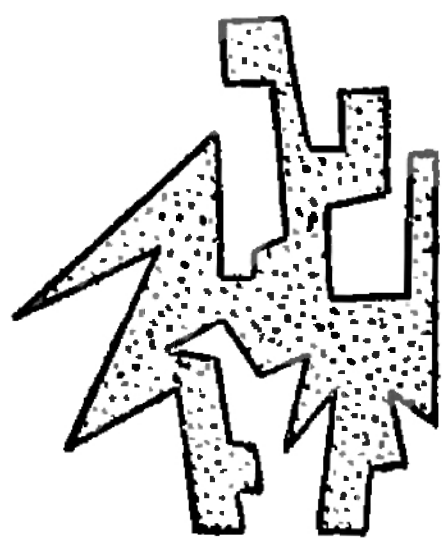


Рис. 5.5

порой к неожиданным результатам — об этом подробнее рассказано в четвертой части книги.)

Мы же будем считать теперь, что граница  $\partial\Omega$  не имеет изломов, т. е. в каждой точке границы можно провести касательную. Казалось бы, если для освещения невыпуклого многоугольника, как было сказано (но не доказано), хватит одной лампочки, то для области  $\Omega$ , получающейся из многоугольника «скруглением» его вершин, одной лампочки хватит тем более.

Однако гипотетический ответ 1, являясь (с большой вероятностью) верным для многоугольников, *неверен в общем случае* — для областей с гладкой границей. В замечательном

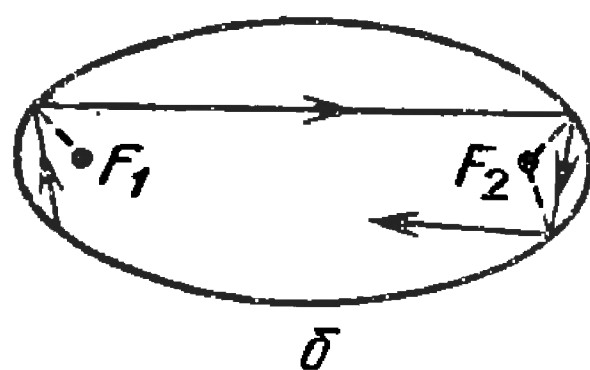
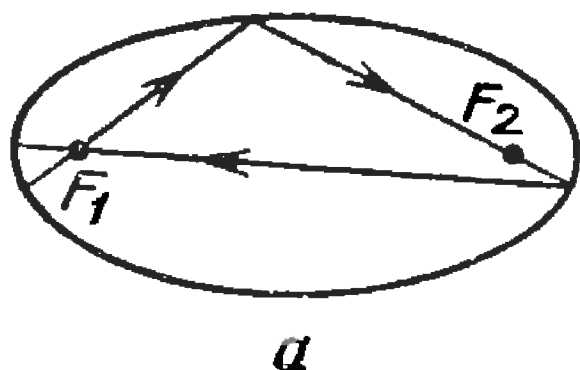


Рис. 5.6

примере области, для освещения которой нужно много лампочек, используется только знание того, что выпущенный из одного фокуса эллипса луч света после отражения пройдет через второй его фокус, а луч, выпущенный не из фокуса, никогда не пройдет ни через один фокус (рис. 5.6, а, б). Сформулируем существование такой области в виде утверждения.

**Утверждение 1** Для любого натурального  $n$  существует область с гладкой границей, для освещения которой необходимо более  $n$  точечных источников (лампочек).

Построим явно эту область  $\Omega$  и докажем для нее утверждение 1. Построение производится в несколько этапов \*).

Этап 1. Рассмотрим верхнюю половину эллипса с большой осью  $AB$ , дополненную двумя «мочками», ограниченными полуокружностями, соединяющими фокусы  $F_1$  и  $F_2$  с точками  $A$  и  $B$  (рис. 5.7). Полученной области  $\Omega_1$  дадим название «телефон».

Л е м м а 1. Никакой луч, выходящий из левой мочки телефона  $\Omega_1$ , никогда не попадет на отрезок  $F_1F_2$ .

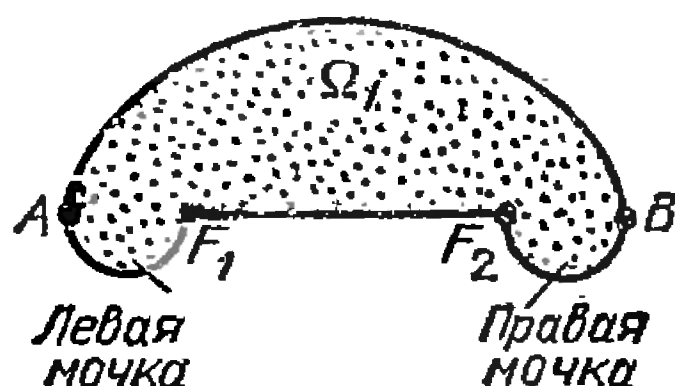


Рис. 5.7

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Действительно, рассмотрим первое отражение луча, выпущенного из левой мочки (рис. 5.8, а). Как падающий, так и отраженный лучи лежат вне  $\triangle F_1XF_2$ , поэтому отраженный луч не пересечет отрезок  $F_1F_2$ . Если  $Y$  — вторая точка отражения

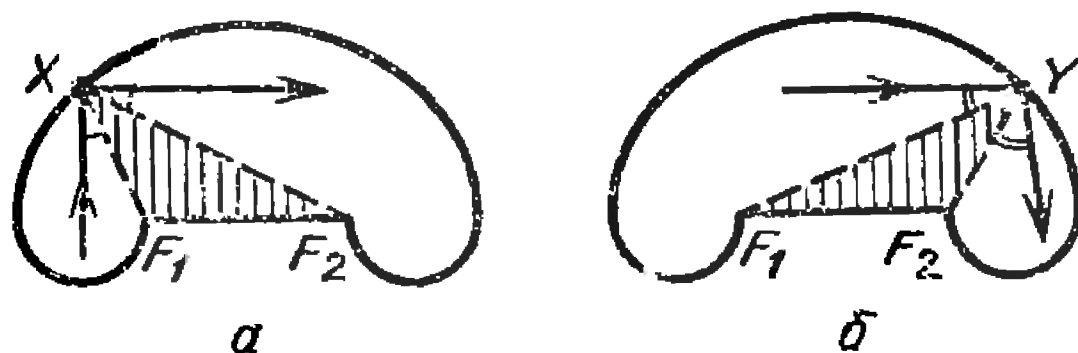


Рис. 5.8

(рис. 5.8, б), то падающий и отраженный лучи в точке  $Y$  лежат вне  $\triangle F_1YF_2$  и опять-таки не пересекают отрезок фокусов  $F_1F_2$ . Вообще, если первоначально выпущенный из мочки луч отражается от точки  $Z$  границы  $\partial\Omega_1$ , лежащей на эллипсе (т. е. выше прямой  $F_1F_2$ ), то он и отраженный луч обязательно расположены вне  $\triangle F_1ZF_2$ . Следовательно, выпущенный из левой мочки луч в конце концов попадет в правую мочку, ни разу не пересекая отрезка фокусов  $F_1F_2$ ; после одного или нескольких отражений в правой мочке луч до вторичного попадания в левую мочку также ни разу не пересечет отрезка  $F_1F_2$ , что следует из приведенного выше рассуждения и полной равноправности обеих мочек. Это и доказывает лемму 1.

Приведем еще одно столь же простое, но более изящное, доказательство леммы 1. Отбросим мысленно нижнюю границу об-

\*) На каждом этапе строится область, граница которой в местах соединения криволинейных и прямолинейных частей затем «сглаживается» (это особо не оговаривается в дальнейшем).

ласти  $\Omega_1$  (обе полуокружности мочек и отрезок фокусов), и дополним телефон нижней половиной эллипса. Мы не знаем, как луч света ведет себя в мочке, но как только он выходит из нее в верхнюю половину эллипса, будем считать, что он отразился от нижней (фиктивной) половины эллипса в соответствующей точке  $C$  (рис. 5.9). Но, как мы знаем из § 4, любая бильiardная траектория в эллипсе, одно звено которой не пересекает  $F_1F_2$ , обладает тем свойством, что и все ее звенья не пересекают отрезка фокусов  $F_1F_2$  (поскольку все звенья касаются софокусного эллипса, содержащего отрезок  $F_1F_2$  внутри себя). В частности, этим свойством обладают звенья в верхней части эллипса, которые в действительности являются звеньями траектории луча света, выпущенного из левой мочки; этим доказательство леммы 1 и завершается.

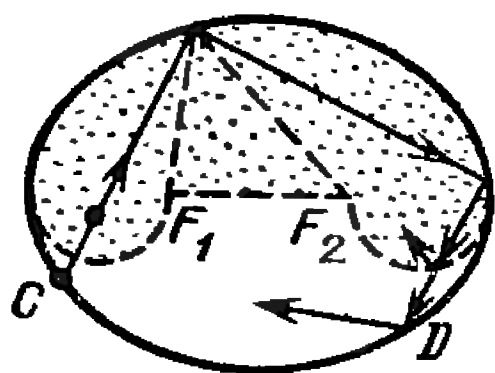


Рис. 5.9

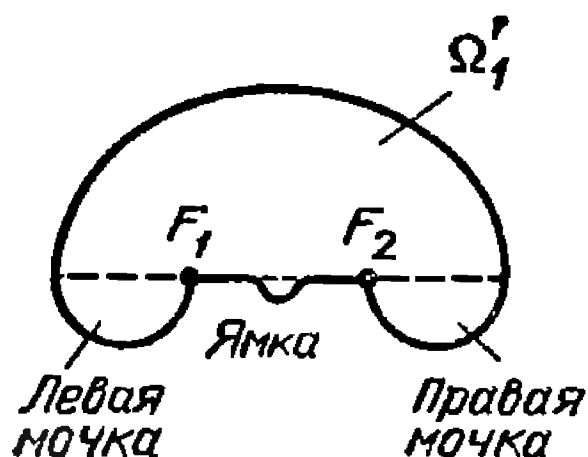


Рис. 5.10

**Этап 2.** От телефона  $\Omega_1$  легко перейти к зеркальной области  $\Omega_2$ , которая не может быть освещена одной лампочкой.

Построим сначала область  $\Omega_1'$ , изображенную на рис. 5.10; она отличается от области  $\Omega_1$  тем, что середина отрезка  $F_1F_2$  заменена неглубокой «ямкой» в виде полуокружности.

**Л е м м а 2.** Если лампочка находится в одной из мочек или же в ямке, то она не освещает область  $\Omega_1'$  полностью.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если лампочка расположена в одной из мочек, то ни один луч, исходящий из нее, не пересекает отрезка  $F_1F_2$  по лемме 1 и тем самым не попадает в ямку. Следовательно, в этом случае ямка вообще не освещена.

Пусть теперь лампочка  $O$  находится в ямке. Предположим, что какой-то луч  $\gamma$ , исходящий из лампочки, после некоторого числа отражений от границы  $\partial\Omega_1'$  попал в мочку, для определенности в левую. Если точка  $P$  мочки освещена этим лучом, то перенесем лампочку  $O$  из ямки в точку  $P$ . Тогда один из лучей, выходящих из лампочки  $P$ , геометрическая траектория которого совпадает с траекторией луча  $\gamma$  (изменено только направление движения), попадет в ямку, — и осветит точку  $O$  в ней. Это противоречит лемме 1 — никакой луч, исходящий из точки  $P$ , не может попасть в ямку. Лемма 2 доказана.

**Задача 5.1.** Можно ли область  $\Omega'_1$  осветить тремя лампочками?

**Ответ.** Можно, и даже напрямую (т.е. без отражений от границы) — поскольку  $\Omega'_1$  можно представить в виде объединения трех звездчатых областей (каких?).

**Задача 5.2.** Можно ли область  $\Omega'_1$  осветить одной лампочкой?

**Ответ.** Можно. Указание. Поместите лампочку в точку  $M$  — середину дуги эллипса (рис. 5.11, а).

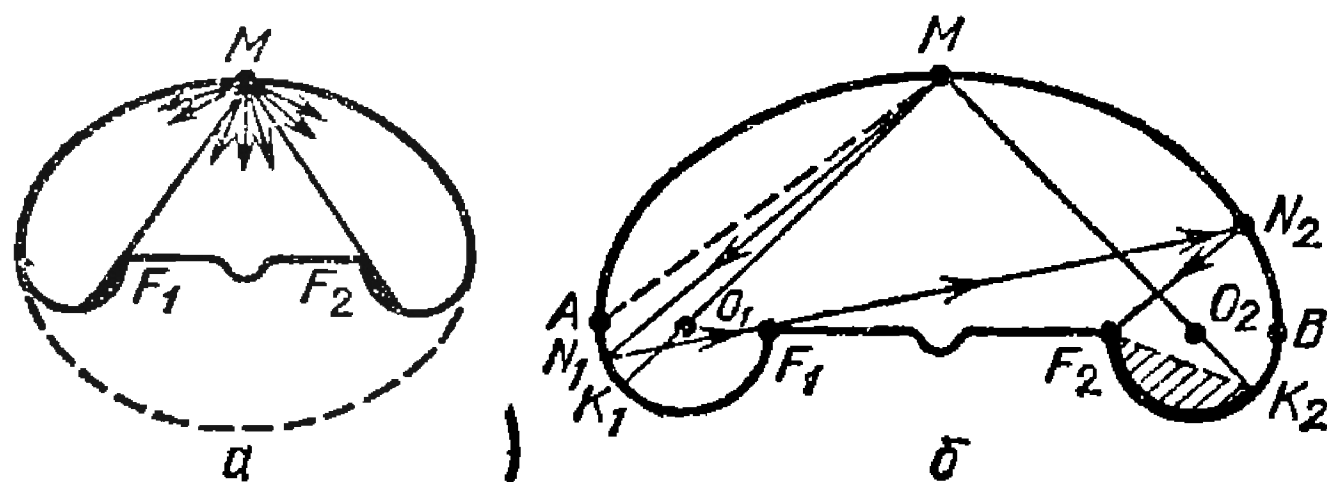


Рис. 5.11

**Решение.** Для доказательства того, что лампочка, помещенная в середину  $M$  дуги эллипса, осветит всю область  $\Omega'_1$ , достаточно доказать, что полностью будут освещены обе мочки телефона (вся остальная часть области  $\Omega'_1$  освещается лампочкой напрямую).

Рассмотрим для доказательства набор специально выбранных лучей, выходящих из  $M$ . Первый луч выберем выходящим из  $M$  в сторону центра  $O_1$  левой мочки (рис. 5.11, б). Проходя через центр полуокружности  $O_1$ , луч  $MO_1$  отражается от нее в точке  $K_1$  и движется в противоположном направлении  $K_1M$ , попадает в точку  $M$ , отражается от дуги эллипса в этой точке, проходит затем через центр  $O_2$  правой мочки (полуокружности) и, отразившись от правой полуокружности в точке  $K_2$ , движется опять в обратном направлении  $K_2M$ , чтобы после отражения в точке  $M$  начать снова двигаться по  $MK_1$ . Таким образом,  $MK_1MK_2M$  — периодическая бильярдная траектория.

В качестве второго луча, выпущенного из лампочки  $M$ , выберем такой, который после отражения в точке  $N_1$  левой мочки пройдет через левый фокус эллипса  $F_1$ . Такой луч  $\gamma$  найдется, поскольку луч, идущий из  $M$  в  $A$  — левый конец большой оси (рис. 5.11), после отражения попадет в некоторую точку левой мочки, а луч, идущий из  $M$  в  $K_1$ , отражается в  $K_1$  в обратном направлении; таким образом, некоторый луч  $\gamma = MN_1$ , лежащий между лучами  $MA$  и  $MK_1$ , после отражения пройдет через  $F_1$ .

Далее, луч  $\gamma$  отразится от дуги эллипса (в точке  $N_2$ ) и попадет во второй фокус эллипса  $F_2$ .

Наконец, рассмотрим все лучи, расположенные между лучом  $\gamma = MN_1$  и лучом  $MK_1$ . Поскольку лучи  $\gamma$  и  $MK_1$  определяют на правой мочке точки  $F_2$  и  $K_2$ , то все лучи между ними заполняют целиком всю дугу  $F_2K_2$  полуокружности. Соединив  $F_2$  и  $K_2$  отрезком, находим, что все рассмотренные лучи освещают полностью сегмент круга  $F_2K_2$  (он заштрихован на рис. 5.11, б).

Следовательно, вся правая мочка области  $\Omega'_1$  полностью освещена лампочкой  $M$ . Из симметрии следует, что по тем же соображениям освещена и вся левая мочка. Итак, область  $\Omega'_1$  полностью освещена одной лампочкой, помещенной в точку  $M$ . Задача решена.

Переходим к построению области  $\Omega_2$ . Область  $\Omega_2$  строится из двух экземпляров области  $\Omega'_1$  следующим образом. В первом экземпляре — обозначим его  $\Omega_1^1$  — вытягиваем ямку в «трубу» (рис. 5.12, а), а во втором экземпляре  $\Omega'_1$  — обозначим его  $\Omega_1^2$  — вытягиваем в «трубу» одну из мочек

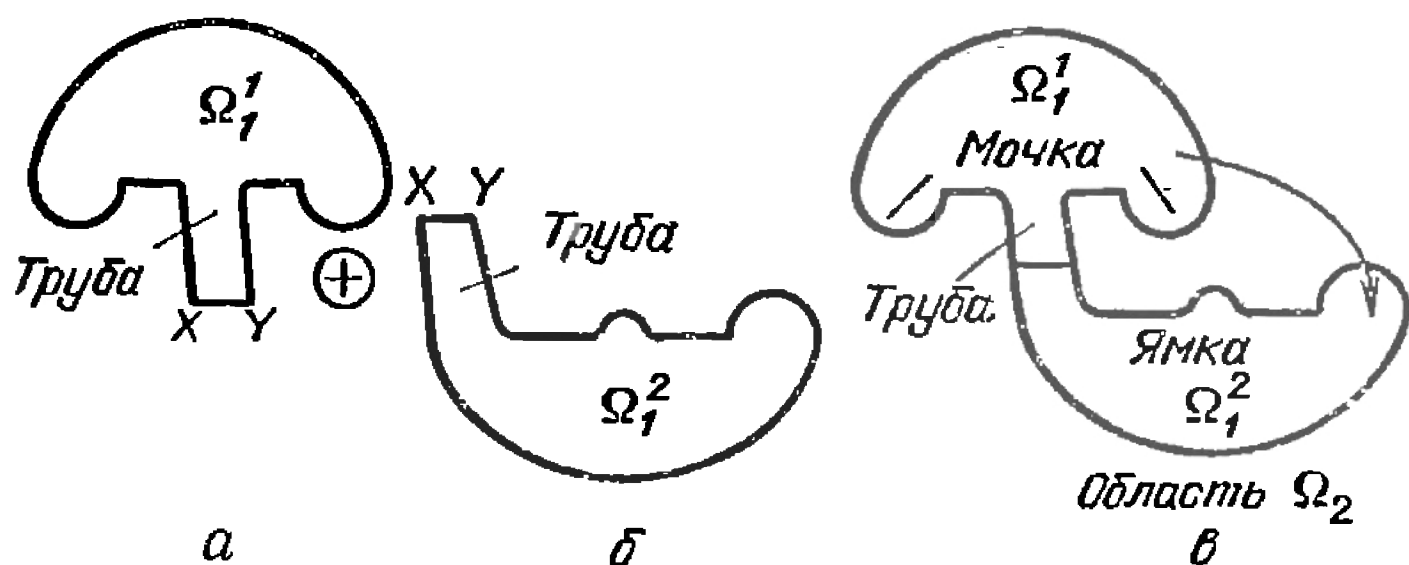


Рис. 5.12

(рис. 5.12, б). Область  $\Omega_2$  получается «склеиванием» областей  $\Omega_1^1$  и  $\Omega_1^2$  по общим отрезкам  $XY$  их труб (рис. 5.12, в). Эта область содержит три мочки, одну трубу и одну ямку.

**Л е м м а 3.** Область  $\Omega_2$  не может быть освещена одной лампочкой.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Так как  $\Omega_2 = \Omega_1^1 \cup \Omega_1^2$ , то лампочка может располагаться либо в области  $\Omega_1^1$ , либо в области  $\Omega_1^2$  (отрезок  $XY$  считаем общим для обеих этих областей). Разберем отдельно указанные два случая.

Если лампочка находится в области  $\Omega_1^1$  и, быть может, даже ее освещает (см. задачу 5.2), то она никак не может осветить целиком область  $\Omega_1^2$ . Действительно, область  $\Omega_1^2$  может освещаться исключительно лучами, идущими от лампочки через трубу — все эти лучи пересекают отрезок  $XY$  и попадают в  $\Omega_1^1$ . Однако из леммы 2 следует, что ни один из этих лучей не попадает в ямку области  $\Omega_1^2$ . Итак, в первом случае в области  $\Omega_1^2$  неосвещенным местом является ямка.

Если же лампочка находится в области  $\Omega_1^2$ , то лучи, проникающие в область  $\Omega_1^1$ , опять-таки все проходят через трубу, т. е. выходят из бывшей ямки области  $\Omega_1^2$ . И снова, по лемме 2 получаем, что все эти лучи не попадут в мочки области  $\Omega_1^1$ . Итак, во втором случае неосвещенным местом области  $\Omega_2$  оказываются обе мочки области  $\Omega_1^1$ . Лемма 3 доказана.



Этап 3. Сейчас мы модернизируем область  $\Omega_2$  и построим область  $\Omega$ , о которой говорится в утверждении 1.

Для этого не будем ограничивать количество областей  $\Omega_i^j$ , из которых будет построена область  $\Omega$ . Не будем также подробно описывать построение области  $\Omega$ , а отошлем читателя сразу к рис. 5.13, на котором изображена структура области  $\Omega$ .

Область  $\Omega$  содержит большое число мочек и труб, а также одну ямку. Она состоит из объединения областей  $\Omega_1^i$ ,

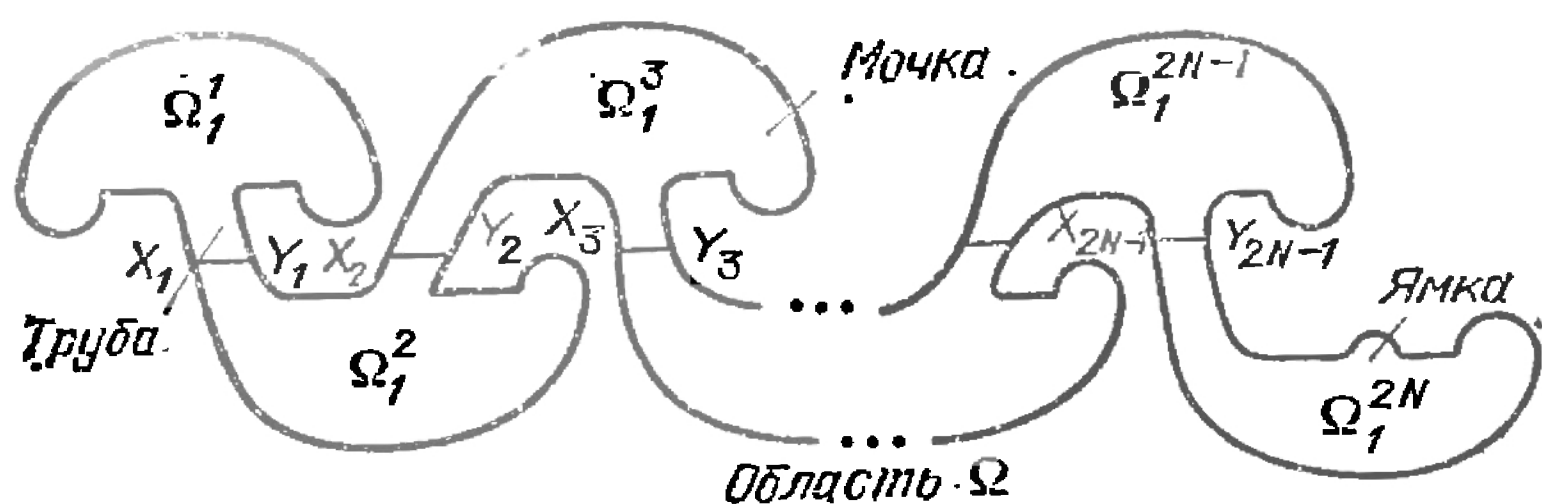


Рис. 5.13

в каждую из которых включается часть трубы, ограниченная срезом  $XU$  с соответствующими индексами. Поэтому если лампочка  $O$  находится в области  $\Omega_1^i$ , то она не может осветить целиком ни область  $\Omega_1^{i-1}$  (при  $i > 1$ ), ни область  $\Omega_1^{i+1}$  (и  $i < 2N$ ), так как лучи, проникающие в эти области из  $\Omega$  через соединяющие их трубы, либо не осветят мочек, либо не осветят ямки. (Подробное доказательство аналогично приведенному в лемме 3.)

Следовательно, на каждую область  $\Omega_1^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2N$ , и, но для ее освещения не менее одной лампочки, которая должна располагаться в этой области. Значит, для полного освещения всей области  $\Omega$  нужно не менее  $2N$  лампочек. Поэтому, если  $2N > n$ , то область  $\Omega$  не может быть освещена  $n$  лампочками. Утверждение 1, таким образом, полностью доказано.

После сказанного мы можем дать второй гипотетический ответ на поставленный вопрос о числе лампочек.

**ответ 2.** Для освещения любой ограниченной области  $\Omega$  всегда достаточно конечного числа лампочек.

Построенный пример показывает, что это конечное число лампочек может оказаться сколь угодно большим.

Однако и ответ 2 оказывается неверным! В действительности справедливо

**Утверждение 2.** Существует такая ограниченная область  $\Omega^*$ , для освещения которой необходимо бесконечно много лампочек.

Докажем это утверждение. Рассмотрим рис. 5.13 и отбросим в нем всю правую часть, идущую после многоточия. Многоточие на возникшей картинке будет означать теперь, что «телефоны»  $\Omega_1^1, \Omega_1^3, \Omega_1^5, \dots$  продолжаются одинаковым образом вправо до бесконечности. Как следует из утверждения 1, полученную бесконечную — неограниченную — область нельзя осветить конечным числом лампочек. Однако в утверждении 2 говорится об *ограниченной* области  $\Omega^*$ .

Получить ее из построенной неограниченной области несложно, если применить известный в математике прием

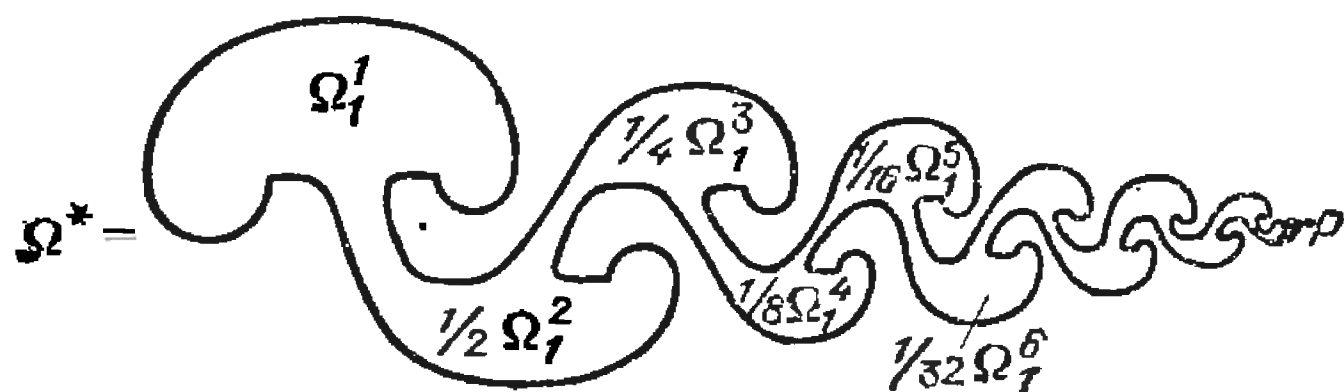


Рис. 5.14

«сжатия»: он состоит в том, что вместо одинаковых (конгруэнтных) областей  $\Omega_i^i$  рассматриваются области, убывающие в своих размерах по геометрической прогрессии, например, со знаменателем 2. Итак, считаем область  $1/2 \Omega_1^2$  вдвое меньшей области  $\Omega_1^1$ , область  $1/4 \Omega_1^3$  — вдвое меньшей области  $1/2 \Omega_1^2$  и так далее (рис. 5.14).

Полученная в результате область  $\Omega^*$  имеет конечные размеры (по горизонтали размер примерно вдвое больший, чем горизонтальный размер области  $\Omega_1^1$ ) и обладает тем свойством, что для ее освещения нужно бесконечно много лампочек. Утверждение 2 доказано.

Отметим, что область  $\Omega^*$  имеет на границе особую точку  $P$ ; в ней, как говорят математики, *нарушается гладкость границы*. Нетрудно видеть, что никакой луч, выпущенный из произвольной точки области  $\Omega^*$ , не достигает точки  $P$  (объясните, почему).

Для каких ограниченных областей  $\Omega$  ответ 2 все же справедлив?

Здесь мы вынуждены вернуться к началу этого параграфа и дать ответ на поставленный вопрос об устройстве границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ , которую можно осветить конечным числом лампочек *напрямую* (т. е. без отражений от границы). Ясно, что ответ на этот вопрос будет одновременно ответом и на поставленный вопрос про зеркальную область, поскольку если зеркальную область нельзя осветить конечным чис-

лом лампочек (как, например, область  $\Omega^*$  на рис. 5.14), то и напрямую ее осветить нельзя; если же область  $\Omega$  можно осветить конечным числом лампочек напрямую, то и зеркальная область  $\Omega$  освещается тем же (конечным) набором лампочек (а может быть, и меньшим набором).

Выше мы отмечали, что звездчатая область освещается одной лампочкой, помещенной в «точку видимости». Любая область, которая может быть разбита на конечное число звездчатых областей, освещается конечным числом лампочек напрямую — по числу звездчатых областей разбиения.

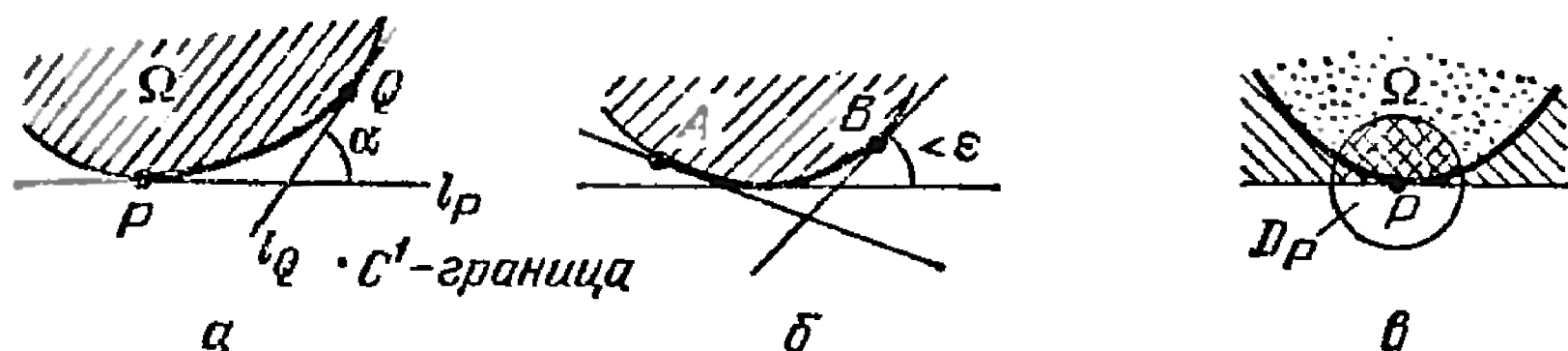


Рис. 5.15

Отсюда следует, что область  $\Omega^*$  на рис. 5.14 не может быть разбита на конечное число звездчатых областей (объясните, почему). Все дело в том, что граница  $\partial\Omega^*$  имеет особую точку  $P$  — в ней нарушается гладкость границы. Оказывается, что если все точки границы области  $\Omega$  — неособые (точное определение см. ниже), то  $\Omega$  может быть покрыта конечным числом звездчатых областей, и тем самым, освещена конечным числом лампочек.

Дадим точное определение неособой точки и приведем формулировку утверждения о разбиении области на звездчатые множества.

**О п р е д е л е н и е.** Точка  $P$  границы  $\partial\Omega$  называется неособой, если, во-первых, через  $P$  можно провести касательную  $l_P$  (прямую, имеющую с границей  $\partial\Omega$  только одну общую точку —  $P$ ), во-вторых, через близкие к  $P$  точки границы  $Q$  также можно провести касательные  $l_Q$ , и, в-третьих, угол  $\alpha = \widehat{l_Q l_P}$  между касательными  $l_Q$  и  $l_P$  является непрерывной функцией длины дуги  $\smile QR$ , проходящей от точки  $Q$  к точке  $P$  по границе  $\partial\Omega$  (рис. 5.15, а). Если все точки границы неособые, то говорят, что граница  $\partial\Omega$  имеет гладкость  $C^1$  и называют ее  $C^1$ -гладкой границей.

Геометрический смысл  $C^1$ -гладкой границы  $\partial\Omega$  состоит в том, что на малой дуге  $\smile AB$  границы все касательные мало отличаются друг от друга, т. е. все попарные углы между ними малы и тем меньше, чем ближе друг к другу точки

$A$  и  $B$  (рис. 5.15, б). Это означает, что пересечение круга  $D_P$  с центром  $P \in \partial\Omega$  с областью  $\Omega$  мало отличается от пересечения круга  $D_P$  с полуплоскостью, ограниченной касательной в точке  $P$  (рис. 5.15, в).

**У т в е р ж д е н и е 3.** *Любая ограниченная область  $\Omega$  с  $C^1$ -гладкой границей  $\partial\Omega$  является объединением конечного числа звездчатых множеств.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для каждой точки  $P$  области  $\Omega$  выберем открытый круг  $D_P$  с центром  $P$ , целиком лежащий в области  $\Omega$ , если  $P$  — ее внутренняя точка, и пересекающий  $\Omega$  по звездчатому множеству, если  $P$  лежит на границе. Последнее можно сделать, поскольку  $P$  — не особая точка границы и пересечение  $D_P \cap \Omega$  мало отличается от пересечения круга  $D_P$  с полуплоскостью, ограниченной касательной в точке  $P$  (рис. 5.15, в).

Таким образом, вся область  $\Omega$  оказывается покрытой бесконечным числом открытых кругов  $D_P$ , центры которых лежат в  $\Omega$  или на границе  $\partial\Omega$ . Из математического анализа известно, что из этого покрытия можно выбрать конечное число элементов (кругов), также полностью покрывающих всю область  $\Omega$  (поскольку  $\Omega$  — замкнутое\*\*) и ограниченное множество на плоскости). Рассматривая пересечения этих кругов с областью  $\Omega$ , мы видим, что они являются звездчатыми множествами. Таким образом, получаем покрытие области  $\Omega$  конечным числом звездчатых множеств, что и требовалось доказать.

Сформулируем окончательный результат в виде теоремы.

**Т е о р е м а.** *Зеркальная область  $\Omega$ , ограниченная замкнутой кривой  $L$  без изломов (т. е. такой, в каждой точке которой можно провести единственную касательную), может быть освещена (и даже напрямую) конечным набором лампочек, если  $L$  является кривой гладкости  $C^1$ . Если же хотя бы одна точка кривой  $L$  является особой, конечного набора лампочек для освещения области  $\Omega$  может не хватить.*

---

\*) То есть круг без границы.

\*\*) Множество называется замкнутым, если все его предельные точки принадлежат самому множеству. Таким множеством является, в частности, область с границей. (Напомним, что предельная точка множества  $S$  — это такая точка, в любой окрестности которой расположено бесконечно много точек множества  $S$ .)

## § 6. Экстремальные свойства бильярдных траекторий.

### Принцип Ферма и теорема Биркгофа

Начнем параграф с ответа на следующий вопрос, уже поставленный в § 4.

**В о п р о с.** Если  $\gamma$  — произвольная кривая на плоскости,  $A$  и  $B$  — точки, лежащие по одну сторону от  $\gamma$ , то где следует выбрать точку  $M$  на кривой  $\gamma$ , чтобы сумма  $AM + BM$  длин отрезков  $AM$  и  $BM$  была минимальной . . . или максимальной?

Поясним предварительно, почему в вопросе фигурирует как минимум суммы  $AM + BM$ , так и ее максимум.

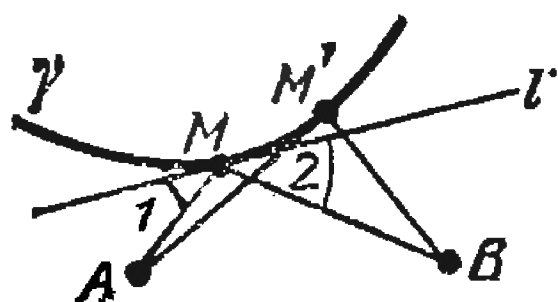


Рис. 6.1

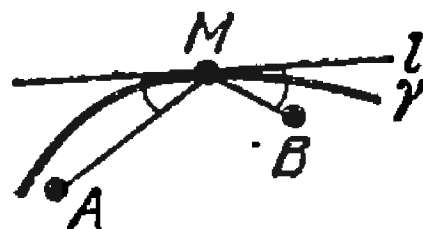


Рис. 6.2

Если кривая  $\gamma$  обращена своей выпуклостью в сторону точек  $A$  и  $B$  (рис. 6.1), то для траектории  $AMB$  нетрудно опять вывести «принцип наименьшего пути» (справедливый в случае, когда  $\gamma$  — прямая): путь  $AMB$  кратчайший, если отрезки  $AM$  и  $BM$  образуют с касательной к кривой  $\gamma$  в точке  $M$  равные углы. Действительно, вся кривая  $\gamma$  лежит по одну сторону от своей касательной  $l$ , а точки  $A$  и  $B$  — по другую, стало быть, для произвольной точки  $M' \in \gamma$ , отличной от  $M$ , имеем

$$AM' + M'B > AM + MB.$$

Однако, если  $\gamma$  обращена к точкам  $A$  и  $B$  не выпуклостью, а вогнутостью (рис. 6.2), то приведенное рассуждение не проходит: кривая  $\gamma$  вместе с точками  $A$  и  $B$  лежит по одну сторону от касательной  $l$  и выписанное выше неравенство становится неверным. Сейчас вы увидите, что от суммы  $AM + MB$  нельзя требовать только ее минимальности, а правильно говорить об экстремальности, подразумевая также другой крайний случай — максимальность суммы  $AM + MB$ .

Итак, мы ищем на кривой  $\gamma$  такую точку (или точки)  $M$ , чтобы сумма расстояний от двух заданных точек  $A$  и  $B$ , лежащих по одну сторону от  $\gamma$ , была экстремальной (минимальной или максимальной).

Если  $\gamma$  — эллипс с фокусами  $A$  и  $B$ , то в качестве точки  $M$  можно взять *любую* точку эллипса: сумма  $AM+MB$  здесь всегда одна и та же. Если же  $\gamma$  — не эллипс с фокусами  $A$  и  $B$ , то рассмотрим для каждого числа  $s$ , большего длины отрезка  $AB$ , множество  $\Gamma_s$  таких точек  $M$ , для которых  $AM+MB=s$ . Тогда  $\Gamma_s$  — эллипс с фокусами  $A$  и  $B$ , а множество всех таких эллипсов  $\{\Gamma_s\}$  образует семейство софокусных эллипсов: чем больше  $s$ , тем больше размеры этих эллипсов и меньше их эксцентриситеты.

В прямоугольной системе координат  $Oxy$  софокусные эллипсы с центром  $O$  записываются единой формулой, зависящей от одного параметра  $t$ :

$$\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} = 1,$$

где  $a$  и  $b$  — фиксированные числа. То, что для разных  $t$  эти эллипсы имеют одинаковые фокусы, следует из рис. 4.2 и из постоянства разностей квадратов полуосей:

$$a^2 - b^2 = (a^2 + t) - (b^2 + t),$$

поскольку все эти разности равны  $c^2$  — квадрату расстояния от центра до фокуса эллипса (докажите это); при  $t=0$  получаем эллипс с полуосями  $a$  и  $b$  и эксцентриситетом  $e=c/a$ . У эллипса, внутри которого расположен софокусный эллипс, эксцентриситет меньше, так как величина  $c$  у них одинакова, а у внутреннего эллипса большая полуось меньше ( $e_2=c/\sqrt{a^2+t_2} > e_1=c/\sqrt{a^2+t_1}$  при  $t_2 < t_1$ ).

Докажем, что *искомой экстремальной точкой*  $M$  (если она существует) на  $\gamma$  является такая точка, в которой один из эллипсов  $\Gamma_{s_0}$  указанного семейства касается кривой  $\gamma$ .

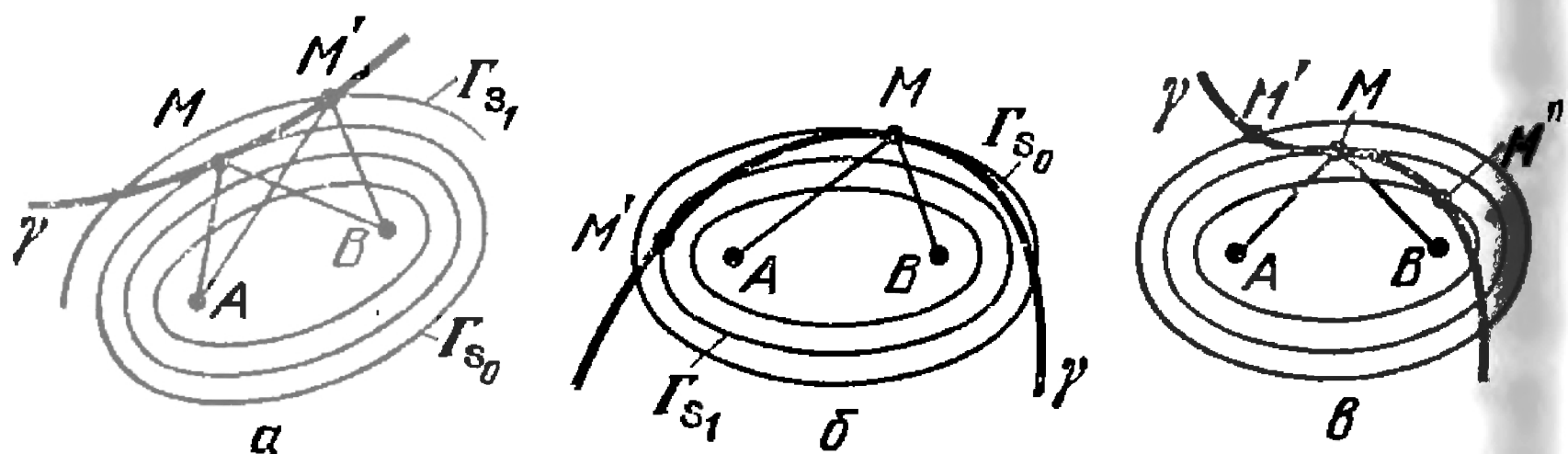


Рис. 6.3

В самом деле, если кривая  $\gamma$  по обе стороны от точки касания  $M$  лежит вне касающегося ее эллипса  $\Gamma_{s_0}$  (рис. 6.3, а), то сумма  $AM+BM$  минимальна, поскольку любая другая точка  $M'$  на  $\gamma$  лежит одновременно на софокусном эллипсе  $\Gamma_{s_1}$ , с  $s_1 > s_0$ , т. е.  $s_1 = AM' + M'B > s_0 = AM + MB$ .

Если же кривая  $\gamma$  вблизи точки  $M$  лежит внутри касающегося ее в  $M$  эллипса  $\Gamma_{s_0}$  (рис. 6.3, б), то длина до-



маной  $AMB$ , равная  $s_0$ , больше чем длина любой другой ломаной  $AM'B$ , так как точка  $M'$  лежит на софокусном эллипсе  $\Gamma_{s_1}$  с  $s_1 < s_0$ .

«Смешанный случай», изображенный на рис. 6.3, в, не дает ни минимума, ни максимума. Экстремум следует понимать, как сказано выше — по сравнению с близкими к  $M$  точками (такой экстремум называют *локальным*).

Если предположить, что мы умеем строить семейство софокусных эллипсов и находить точки касания эллипсов этого семейства с кривой  $\gamma$ , то утверждение можно считать доказанным.

Для наших целей вполне достаточно такого (принципиально возможного, но с трудом осуществимого на практике) способа отыскания локальных минимумов и максимумов длины ломаной  $AMB$ , и мы сейчас извлечем из этого способа замечательные следствия.

Из первого бильярдного свойства эллипса следует

**Общий принцип экстремальности бильярдной траектории.** Если ломаная  $AMB$  с данными концами  $A$  и  $B$  и точкой излома  $M$ , принадлежащей данной кривой  $\gamma$ , имеет *наименьшую* или *наибольшую* (т. е. экстремальную) длину среди всех близких к ней двузвенных ломаных с точками излома на кривой  $\gamma$  и теми же концами  $A$  и  $B$ , то эта ломаная является траекторией бильярдного шара (бильярдной траекторией), ведущей из точки  $A$  в точку  $B$  после отражения от борта, имеющего форму кривой  $\gamma$ .

**Доказательство.** Кривая  $\gamma$  в точке  $M$  касается какого-то эллипса  $\Gamma_{s_0}$  с фокусами  $A$  и  $B$ . Следовательно, касательная  $l$  к кривой  $\gamma$  в точке  $M$  является одновременно и касательной к эллипсу  $\Gamma_{s_0}$ . Но углы, образованные звеньями  $AM$  и  $BM$  ломаной  $AMB$  с касательной  $l$  к эллипсу, равны между собой. Это и означает, что  $AMB$  — бильярдная траектория с бортом  $\gamma$ , что и требовалось доказать.

**Задача 6.1.** Привести пример кривой  $\gamma$ , показывающий, что обращение принципа экстремальности бильярдной траектории неверно: может случиться так, что бильярдная траектория  $AMB$  не является ни локально минимальной, ни локально максимальной.

**Задача 6.2.** Доказать, что если кривая  $\gamma$  выпукла, т. е. целиком лежит по одну сторону от своей касательной, то обращение принципа экстремальности бильярдной траектории справедливо: любая бильярдная траектория  $AMB$  в этом случае имеет или локально минимальную, или локально максимальную длину.

Приведем пример, показывающий, что для выпуклой кривой  $\gamma$  могут реализовываться одновременно

и о и минимальные, и максимальные бильярдные двухзвенные ломанные  $AMB$ . Пусть  $\gamma$  — окружность,  $A$  и  $B$  — фиксированные точки внутри этой окружности. Тогда из семейства  $\{\Gamma_s\}$  софокусных эллипсов с фокусами  $A$  и  $B$  выделяются четыре эллипса  $\Gamma_{s_1}, \Gamma_{s_2}, \Gamma_{s_3}, \Gamma_{s_4}$ , два из которых касаются окружности  $\gamma$  *внутренним* образом — пусть это эллипсы  $\Gamma_{s_1}$  и  $\Gamma_{s_2}$ , а два — эллипсы  $\Gamma_{s_3}$  и  $\Gamma_{s_4}$  — *внешним* образом. Возникшие четыре точки касания  $M_1, M_2, M_3, M_4$  (рис. 6.4) являются точками столкновения с бортом  $\gamma$  бильярдного шара, который из точки  $A$  после одного удара

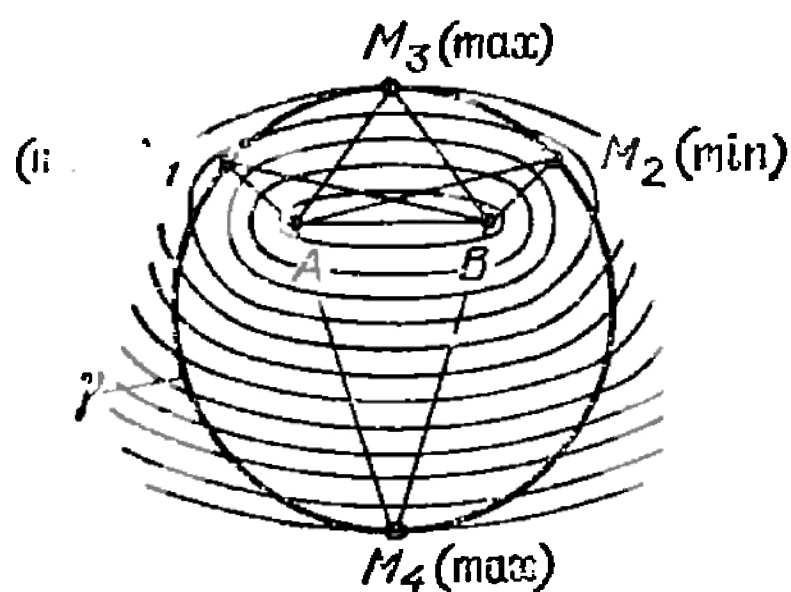


Рис. 6.4

о борт попадает в точку  $B$ , и доставляющие: точки  $M_1$  и  $M_2$  — локальный минимум длины ломаной  $AMB$ , точки  $M_3$  и  $M_4$  — локальный максимум этой длины.

Принцип экстремальности бильярдной траектории является частным (и простейшим) случаем одного из основных принципов классической механики и оптики — *принципа*

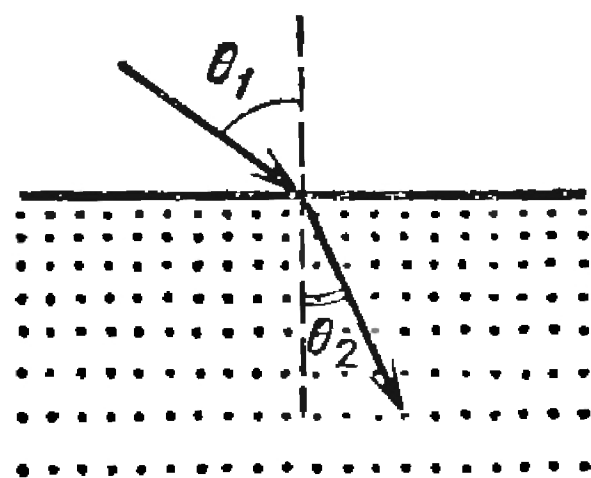
*наименьшего действия*, или *экстремального принципа Ферма* (в оптике он носит название *принципа Мопертюи*). В оптике принцип Ферма (Мопертюи) состоит в том, что свет выбирает из всех возможных путей, соединяющих две данные точки, тот путь, который требует *наименьшего* времени для его прохождения. Применительно к бильярду этот принцип можно сформулировать так: бильярдный шар «*мный*» и выбирает самый короткий из всех возможных путей (мы считаем раз и навсегда скорость бильярдного шара постоянной, поэтому минимальность длины его траектории эквивалентна минимальности времени его движения по этой траектории). Фактически этот принцип для бильярдного шара нами обоснован выше чисто математически. Оказывается, всю классическую механику можно строить как геометрическую оптику многомерного пространства, основываясь именно на принципе Ферма, носящего в механике название «*принцип Гамильтона*» (подробнее об этом см., например, книгу В. И. Арнольда «*Математические методы классической механики*» (М.: Наука, 1979, с. 217 и далее)). Но эта аналогия оптики и механики неэлементарна (она требует развитой техники дифференциального исчисления) и останавливаться на ней мы не будем, а обратимся к более простой и наглядной аналогии.

**Задача 6.3.** Докажите принцип обратимости: если бильярдный шар попал из точки  $A$  в точку  $B$  после нескольких отражений от борта у бильярдного стола, то при его движении из точки  $B$  с противоположной начальной скоростью шар попадет в точку  $A$ , двигаясь точно по тому же пути, но в обратном направлении.

Принцип обратимости мы уже использовали в рассуждениях § 5.

Принцип Ферма позволяет чисто математически доказать закон Снеллиуса — Декарта о преломлении луча света на границе двух оптических сред с разной плотностью («синус угла падения луча света в первой среде и синус угла преломления во второй среде относятся как оптические плотности этих сред»; рис. 6.5), а также доказать, что от-

ношение оптических плотностей двух сред равно отношению скоростей движения света в них. На этих доказательствах мы также не будем здесь останавливаться, они увели- бы нас далеко от бильярдной темы. Отметим лишь, что принцип Ферма, в отличие от *принципа причинности* в физике (суть которого состоит в том, что свет последователь- но идет из одной точки простран- ства в другую, затем в следующую и



$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Рис. 6.5

т. д.) совсем иначе объясняет причину явлений в природе. Вместо причинной обусловленности, когда из одного нашего действия вытекает другое, из того — третье и т. д., этот принцип говорит следующее: в данной ситуации *свет* выбирает путь с наименьшим, или, правильнее, с экстремальным временем прохождения. Но как удастся свету выбирать такой путь? Разве думает он что ли соседние пути и сравнивает их потом друг с другом? В некотором смысле так и происходит. Эта способность света связана с понятием длины волны и поэтому ее нельзя понять в рамках геометрической оптики; длина волны, грубо говоря, есть тот отрезок вперед лежащего пути, который свет может «почувствовать» и сравнить с соседними путями \*). Бильярдный шар является как бы математической

\*) Ответ на поставленный вопрос о свете дает квантовая механика, а ответ на вопрос, почему при отражении луча света от зеркала время его движения от источника  $A$  до детектора  $B$  также экстремально (иными словами, почему при отражении от зеркала угол падения равен углу отражения) дает КЭД — квантовая электродинамика (см. недавно вышедшую в «Библиотечке «Квант» книгу известного американского физика Ричарда Фейнмана «КЭД. Странная теория света и вещества» (вып. 66. М.: Наука, 1988)).

абстракцией светового луча, во внутреннее состояние которой заложена «длина волны», позволяющая шару выбирать кратчайший (экстремальный) путь среди всех близких («виртуальных», т. е. возможных) путей.

Принцип Ферма приводит также к так называемому *принципу Гюйгенса*, который, в свою очередь, объясняет, почему кратчайшими путями распространения света являются *лучи*. Обсудим немного этот момент с математических позиций.

Пусть в точке  $A$  расположен источник света. Рассмотрим множество всех точек  $X$ , до которых свет из точки  $A$

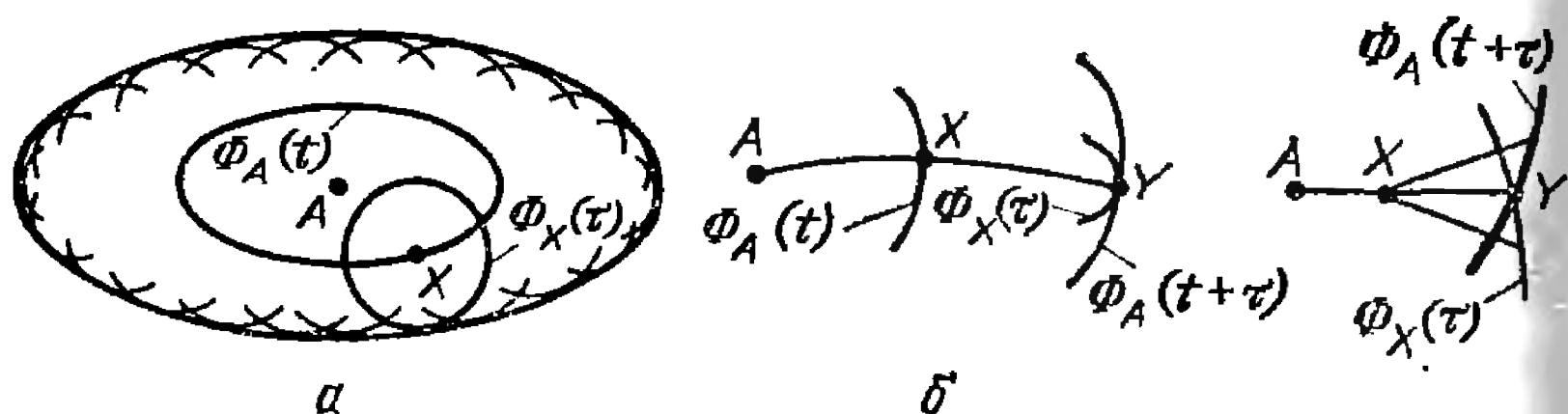


Рис. 6.6

может прийти за время, не большее заданного  $t$ . Граница  $\Phi_A(t)$  этого множества называется *волновым фронтом точки  $A$  через время  $t$*  и состоит из точек, до которых свет может прийти за время  $t$  и не может прийти быстрее. Мы не предполагаем, что среда, в которой распространяется свет, однородная, поэтому волновой фронт  $\Phi_A(t)$  не обязательно является окружностью. Между волновыми фронтами, соответствующими разным значениям  $t$ , имеется замечательное соотношение, открытое Гюйгенсом, которое и носит название принципа Гюйгенса. Этот принцип мы сформулируем в виде теоремы.

**Т е о р е м а Г ю й г е н с а.** *Рассмотрим волновой фронт  $\Phi_A(t)$  точки  $A$  через время  $t$ . Построим для каждой точки  $X$  этого фронта, считая их источниками света, волновой фронт  $\Phi_X(\tau)$  через время  $\tau$ . Тогда волновой фронт  $\Phi_A(t+\tau)$  точки  $A$  через время  $t+\tau$  будет огибать все построенные фронты  $\Phi_X(\tau)$  ( $X \in \Phi_A(t)$ ); рис. 6.6, а).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим точку  $Y$  на фронте  $\Phi_A(t+\tau)$  точки  $A$  через время  $t+\tau$ . Тогда существует путь из  $A$  в  $Y$ , по которому время распространения света равно  $t+\tau$ , и нет более короткого пути. Рассмотрим на этом пути точку  $X$ , до которой свет идет время  $t$ . Никакого более короткого пути из  $A$  в  $X$  не может быть, так как в противном случае путь из  $A$  в  $Y$  не был бы кратчайшим (его

можно было бы укоротить). Значит, точка  $X$  лежит на фронте  $\Phi_A(t)$ . Точно так же, путь  $XU$  свет проходит за время  $\tau$ , и из точки  $X$  в точку  $U$  нет более короткого пути. Следовательно, точка  $U$  лежит на фронте  $\Phi_X(\tau)$  точки  $X$  за время  $\tau$ .

Докажем, что фронты  $\Phi_A(t+\tau)$  и  $\Phi_X(\tau)$  касаются друг друга в точке  $U$ , а не пересекаются. Если бы они *пересекались* (рис. 6.6, в), то в некоторые точки фронта  $\Phi_A(t+\tau)$  луч мог бы из точки  $X$  добраться за время, меньшее  $\tau$ , а значит, из точки  $A$  — за время, меньшее  $t+\tau$ . Это противоречит определению фронта  $\Phi_A(t+\tau)$ . Итак, фронты  $\Phi_X(\tau)$  и  $\Phi_A(t+\tau)$  касаются друг друга в точке  $U$ , что и требовалось доказать.

Принцип Гюйгенса приводит к двум описаниям процесса распространения света. Во-первых, из него следует, что достаточно следить за *лучами*, т. е. кратчайшими путями распространения света. В этом случае локальный характер распространения света задается его вектором скорости. Если направление луча известно, то величина вектора скорости задается свойствами среды. А с другой стороны, можно следить за волновым фронтом и исследовать его поведение.

Бильярдный шар как бы сочетает в себе оба принципа геометрической оптики — прямолинейность движения луча света в однородной среде и осуществление выбора среди всех возможных близких друг к другу траекторий экстремальной, определяемой касанием волнового фронта — в данном случае это один из софокусных эллипсов — с бортом бильярда.

Это сочетание двух принципов геометрической оптики позволяет доказать одну важную и сложную теорему о периодических бильярдных траекториях в выпуклых областях с достаточно гладкой границей (см. с. 97). К ее обсуждению мы и перейдем.

Рассмотрим бильярдный стол в виде выпуклой области  $Q$  с гладкой границей  $\Gamma$ . Диаметр этого стола, т. е. отрезок с концами на границе  $\Gamma$  наибольшей возможной длины обладает следующим замечательным свойством: он перпендикулярен границе  $\Gamma$  в своих концах.

Действительно, если наибольшая хорда  $MN$  не перпендикулярна к касательной  $l$  к границе  $\Gamma$  в точке  $M$ , то сдвинув немного точку  $M$  по кривой  $\Gamma$  в точку  $M'$  так, чтобы угол  $M'MN$  был тупым (рис. 6.7), получим треугольник  $MM'N$ , в котором сторона  $M'N$  больше стороны  $MN$  (как лежащая против тупого угла). Следовательно, хорда  $MN$

имеет не максимальную длину, что противоречит предположению.

Отсюда вытекает, что если запустить бильярдный шар по диаметру стола  $Q$ , то он будет сталкиваться с бортом  $\Gamma$  под прямым углом и отражаясь, двигаться по диаметру. Итак, длиннейшая хорда бильярдного выпуклого стола, пройденная шаром в обоих направлениях, дает одно из

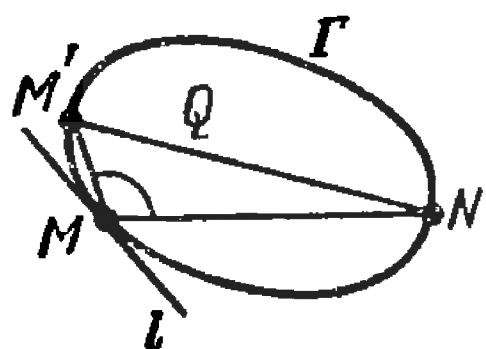


Рис. 6.7

простейших периодических движений — движение периода 2, т. е. по двузвенной траектории (звенья которой отличаются направлениями). Если мы начнем теперь непрерывно вращать эту хорду, уменьшая ее длину настолько мало, насколько это возможно, так, чтобы в конце этого преобра-

зования оба ее конца поменялись местами, мы будем иметь промежуточное положение наименьшей длины, которое будет хордой, пересекающей  $\Gamma$  в месте наименьшей ширины стола  $Q$  (см. задачу 6.4). Эта хорда дает второе периодическое движение, также периода 2.

**Задача 6.4.** Докажите, что эта вторая хорда имеет длину, равную наименьшей ширине полосы, ограниченной двумя параллельными прямыми, в которую полностью помещается вся область  $Q$ .

Детальное изучение небольших возмущений обоих этих периодических движений показывает, что движение вдоль наибольшей хорды неустойчиво (т. е. малое отклонение вектора скорости приводит к большим изменениям траектории шара), в то время как второе движение может быть устойчивым или неустойчивым.

Далее, будем искать периодическое движение бильярдного шара периода 3, т. е. «гармонический» треугольник с вершинами на кривой  $\Gamma$ , являющийся бильярдной траекторией. Его, как и периодическую траекторию периода 2, следует искать среди всевозможных вписанных в  $Q$  треугольников, и выбрать среди них треугольник *максимального* параметра. Строгое доказательство этого (и более общего) факта мы приведем чуть позже, а сейчас обратим внимание на два обстоятельства: во-первых, гармоническому треугольнику отвечают два периодических движения — *по* и *против* часовой стрелки; во-вторых, при непрерывном изменении этого треугольника, не меняя порядка его вершин и стараясь уменьшать его периметр настолько мало, насколько это возможно, так, чтобы в конце этого преобразования получить тот же треугольник,



но с циклически переставленными вершинами, мы пройдем через треугольник наименьшего периметра, который также будет гармоническим и также будет соответствовать двум (по и против часовой стрелки) периодическим движениям периода 3.

Таким же путем может быть установлено существование двух гармонических  $n$ -угольников, делающих  $k \leq n/2$  оборотов вдоль кривой  $\Gamma$ , где  $k$  — число, взаимно простое с  $n$  (точное утверждение содержится в формулировке задачи 6.6). Два периодических движения, соответствующих  $n$ -угольнику типа *максимума*, будут неустойчивы, в то время как два периодических движения, соответствующих  $n$ -угольнику типа *минимакса*, могут быть устойчивыми или неустойчивыми.

Поняв принципиально картину поведения указанных периодических бильярдных траекторий в выпуклых областях, сформулируем и докажем точную математическую теорему о периодических движениях бильярдного шара в выпуклой области  $Q$ . Теорема и ее доказательство, которое мы здесь приведем, принадлежит известному американскому математику Дж. Биркгофу (1884—1944).

**Т е о р е м а Б и р к г о ф а.** *У бильярда в любой выпуклой области  $Q$  на плоскости, ограниченной замкнутой гладкой кривой  $\Gamma$ , существуют периодические бильярдные траектории с любым числом звеньев  $n \geq 3$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть число  $n$  фиксировано. Построим конкретную периодическую бильярдную траекторию из  $n$  звеньев.

Рассмотрим всевозможные вписанные в  $Q$  замкнутые ломаные  $\gamma$ , число сторон у которых не превосходит  $n$  (в рассмотрение входят вписанные трехзвенные, четырехзвенные, ...,  $n$ -звенные ломаные). Выберем среди них ту ломаную  $\gamma_0$ , у которой периметр **максимален**. (Мы не будем вдаваться здесь в подробности, связанные с доказательством существования такой ломаной.)

Мы утверждаем, что тогда *ломаная  $\gamma_0$  имеет ровно  $n$  звеньев*.

Действительно, если бы число звеньев у нее было меньше  $n$ , то ее периметр можно было бы увеличить, заменив произвольное ее звено  $P_1P_2$  на ломаную  $P_1P_0P_2$  с вершиной  $P_0$  на дуге между  $P_1$  и  $P_2$ .

Докажем теперь, что  $\gamma_0$  — *бильярдная траектория в области  $Q$* , т. е. при всех  $k$  последовательные звенья ломаной  $P_{k-1}P_k$  и  $P_kP_{k+1}$  образуют равные углы с касательной к  $\Gamma$  в точке  $P_k$  (рис. 6.8).

Из максимальной длины периметра ломаной  $\gamma_0$  следует, что сумма  $R_{k-1}P + PR_{k+1}$  для всех точек  $P$  на дуге  $R_{k-1}P_kP_{k+1}$  кривой  $\Gamma$  максимальна именно при  $P=P_k$ , иначе периметр ломаной  $\gamma_0$  можно было бы увеличить.

Рассматривая семейство эллипсов  $\Gamma_s$  с фокусами в точках  $R_{k-1}$  и  $R_{k+1}$ , найдем тот эллипс  $\Gamma_{s_0}$ , который касается кривой  $\Gamma$  в некоторой точке  $P$  — такой эллипс обязательно найдется, так как наша кривая гладкая и выпуклая. Но тогда ясно, что сумма  $R_{k-1}P + PR_{k+1}$  максимальна по всем точкам  $P$ , лежащим на дуге  $\Gamma$  между  $R_{k-1}$  и  $R_{k+1}$ : для любой другой точки  $M \in \Gamma$  соответствующий ей эллипс из семейства  $\Gamma_s$  пересекает кривую  $\Gamma$  и лежит строго внутри эллипса  $\Gamma_{s_0}$ , поэтому  $R_{k-1}M + MR_{k+1} < R_{k-1}P + PR_{k+1}$ . Отсюда вытекает, что касание эллипса  $\Gamma_{s_0}$  с кривой  $\Gamma$  происходит именно в точке  $P=P_k$ . А тогда из первого бильярдного свойства эллипса следует, что звенья  $R_{k-1}P_k$  и  $P_kP_{k+1}$  образуют равные углы с прямой  $l$ , являющейся одновременно касательной как к эллипсу  $\Gamma_{s_0}$ , так и к кривой  $\Gamma$  в точке  $P_k$  и поэтому  $R_{k-1}P_k$  и  $P_kP_{k+1}$  — два звена бильярдной ломаной в области  $Q$ . Теорема полностью доказана.

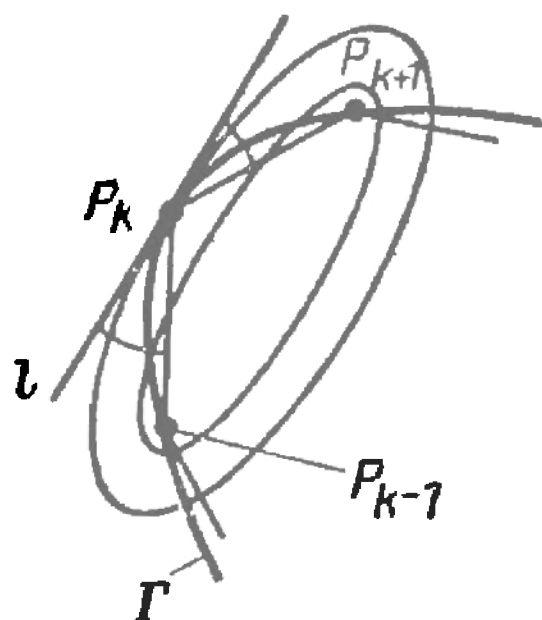


Рис. 6.8

**Задача 6.5.** Какой из вписанных в окружность  $n$ -угольников имеет наибольший периметр?

**Решение.** Правильный  $n$ -угольник. Действительно, замкнутая бильярдная траектория из  $n$  звеньев в окружности является ломаной максимальной длины (по теореме Биркгофа), а с другой стороны, — это обязательно правильный  $n$ -угольник (если только шар делает один оборот вокруг центра; см. § 1).

**Задача 6.6.** Пусть фиксировано натуральное число  $n \geq 3$ . Обозначим через  $\varphi(n)$  количество чисел  $k$ , меньших  $n$  и взаимно простых с  $n$  (\*). Докажите, что существует не менее  $\varphi(n)/2$  периодических  $n$ -звонных бильярдных ломаных на плоскости, вписанных в данную выпуклую область  $Q$  с гладкой границей  $\Gamma$  (рис. 6.9).

**Решение.** При доказательстве теоремы Биркгофа можно было ограничиться доказательством существования бильярдной

\*) Функция  $\varphi(n)$  называется функцией Эйлера и вычисляется по формуле

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right),$$

где  $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$  — каноническое разложение  $n$  на простые множители.

траектории, при движении по которой бильярдный шар обойдет кривую  $\Gamma$  ровно один раз; то же доказательство остается справедливым в классе всех ломаных, обходящих кривую  $\Gamma$  ровно 2 раза, ровно 3 раза и так далее. При этом следует заметить, что 1) число обходов  $k$  достаточно брать только взаимно простым с  $n$ , и что 2) обходу шарика вдоль ломаной, делающей  $k$  оборотов

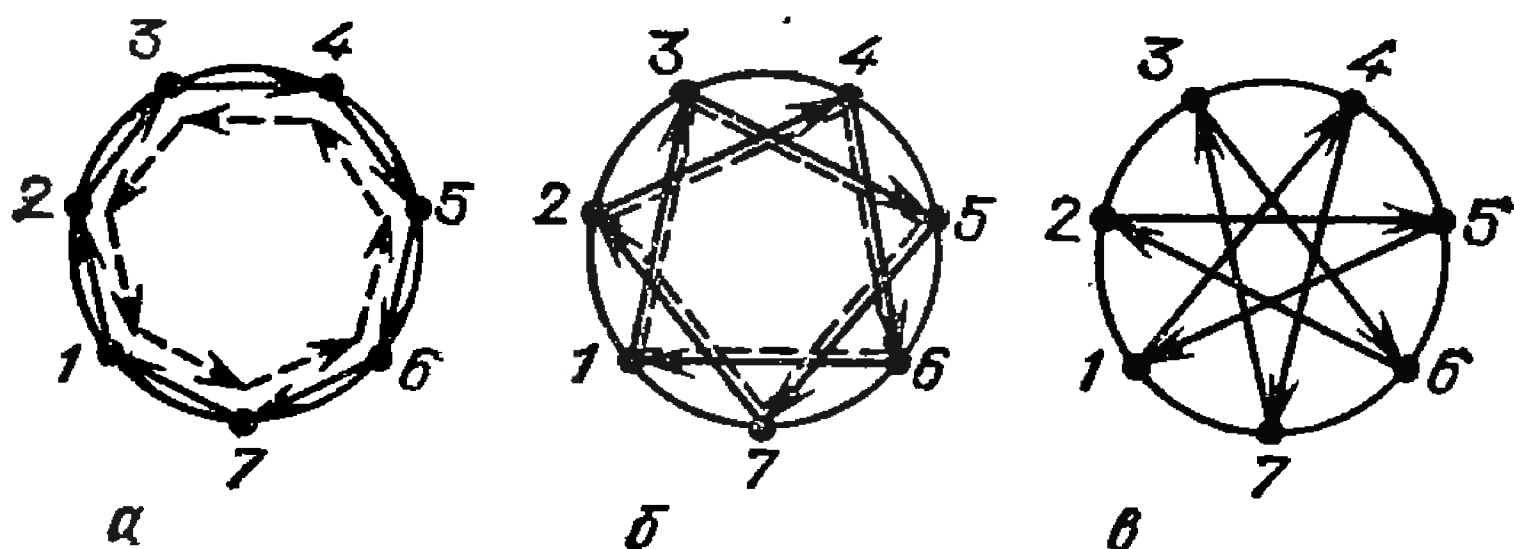


Рис. 6.9

по часовой стрелке, отвечает та же ломаная, но делающая  $k$  оборотов против часовой стрелки. Поэтому геометрически различных ломаных лишь  $\varphi(n)/2$ , что и требовалось доказать.

**Задача 6.7. (Задача Фаньяно.)** Докажите, что в области  $Q$ , имеющей форму остроугольного треугольника, существует замкнутая бильярдная траектория из трех звеньев. **Указание.** Точки излома этой траектории — основания высот треугольника (см. § 27).

**Задача 6.8.** Верно ли, что в любом треугольном бильярде существует периодическая бильярдная траектория из а) 6 звеньев? б) из меньшего, чем заданное  $n$ , числа звеньев?

**Ответ.** а) В остроугольном существует всегда; в тупоугольном, как правило, не существует; б) в тупоугольном треугольнике с очень тупым углом число звеньев у любой периодической траектории может быть сколь угодно большим (т. е. для заданного  $n$  число звеньев может превосходить  $n$ ). Это связано с тем, что если бильярдный шар попал в острый угол, то вылететь из этого угла он сможет только после очень большого числа отражений (подробнее об этом см. гл. 6 и § 27 гл. 8).

Задача 6.8 показывает, что теорема Биркгофа для многоугольников неверна. Причина этого будет прояснена в § 27.

## ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИКА ПРЯМОУГОЛЬНОГО БИЛЬЯРДА

### Глава 3

#### ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО БИЛЬЯРДА

В этой главе сформулированная во введении общая проблема бильярдных траекторий исследуется для бильярда в прямоугольнике. Прямоугольник, как и круг, имеет во всех своих граничных точках (кроме вершин) *п о с т о я н н у ю* кривизну — только не положительную, как у круга, а нулевую. Кроме того, одинаковыми прямоугольниками можно замостить всю плоскость, как это было объяснено во введении. Именно поэтому для бильярда в прямоугольнике, так же как и для бильярда в круге, естественно ожидать полного решения проблемы поведения бильярдных траекторий. Оказывается, методы, использованные в гл. 1, работают и в случае прямоугольника, позволяя не только провести полное исследование рассматриваемого прямоугольного бильярда, но и свести его, в некотором смысле, к уже изученному бильярду в круге.

#### § 7. Бильярдный шар на прямоугольном столе без луз

Напомним, что бильярдом в прямоугольнике называется такая система: один точечный бильярдный шар на прямоугольном бильярдном столе  $ABCD$  без луз, движущийся по нему без трения и отражающийся от его сторон («бортов») по бильярдному закону *«угол падения равен углу отражения»*.

Простейшие бильярдные траектории в прямоугольнике — *периодические*. Они могут быть нескольких типов: состоять из дважды проходимых отрезков между противоположными сторонами (рис. 7.1, а); образовывать семейства параллелограммов со сторонами, параллельными диагоналям прямоугольника (рис. 7.1, б); образовывать

самопересекающиеся замкнутые ломанные (рис. 7.1, в) и т. д.

Бывают и такие траектории, которые попадают в вершины прямоугольника (рис. 7.1, г). В таком случае непонятно, как шару следует двигаться после выхода «из угла»: закон упругого отражения на этот счет никаких указаний не дает. Все такие траектории мы будем называть *особыми* и, как правило, рассматривать не будем,

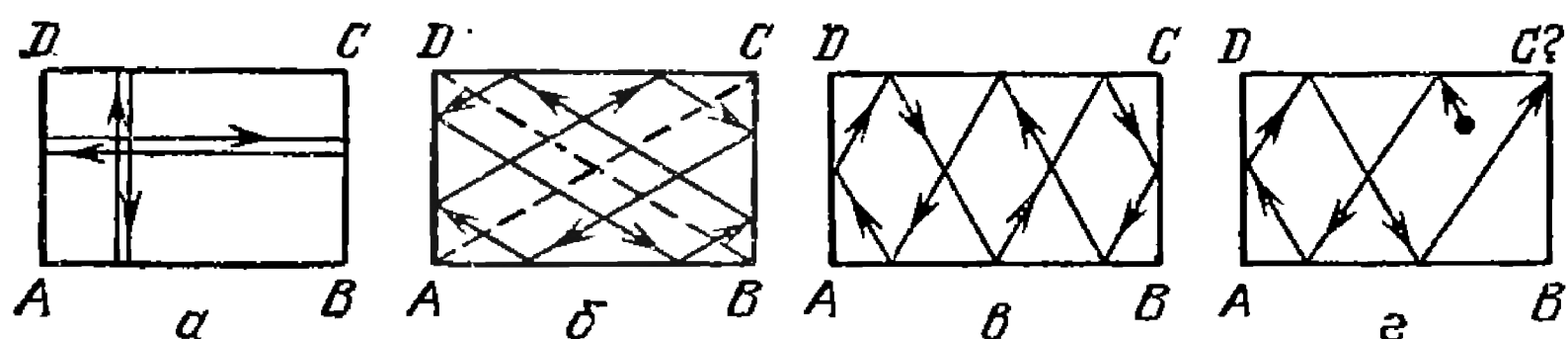


Рис. 7.1

т. е. если траектория попала в вершину, оборвем ее, и от траектории останется только ее часть (полутраектория). (Впрочем, из дальнейших рассмотрений будет понятно, что в случае прямоугольного бильярда шар можно считать вылетающим после попадания в вершину в точности в противоположном направлении; такого вывода нельзя делать для бильярда в произвольном многоугольнике. Объяснение этому вы сможете найти, решив задачу 7.3, или же обратившись к гл. 8).

«Сходу» нарисовать хотя бы одну *непериодическую* траекторию бильярда в прямоугольнике уже значительно сложнее. Задачу о распознавании периодических и непериодических траекторий бильярда мы сейчас решим с помощью

упоминавшейся во введении процедуры «выпрямления траекторий». Опишем ее в общем случае — для бильярда в произвольном многоугольнике.

Пусть  $P_1P_2P_3 \dots$  — произвольная не особая (т. е. не попадающая в углы) траектория бильярда в многоугольнике  $Q = A_1A_2A_3 \dots A_n$  (рис. 7.2). Построим по этой ломаной специальную прямую. А именно, отразим наш многоугольник  $Q$  вместе с ломаной  $P_2P_3P_4 \dots$  относительно той стороны многоугольника, на которой лежит точка  $P_2$  (первое звено ломаной  $P_1P_2$  мы не трогаем). Согласно закону отражения, отрезок  $P_2P'_3$ , симметричный отрезку

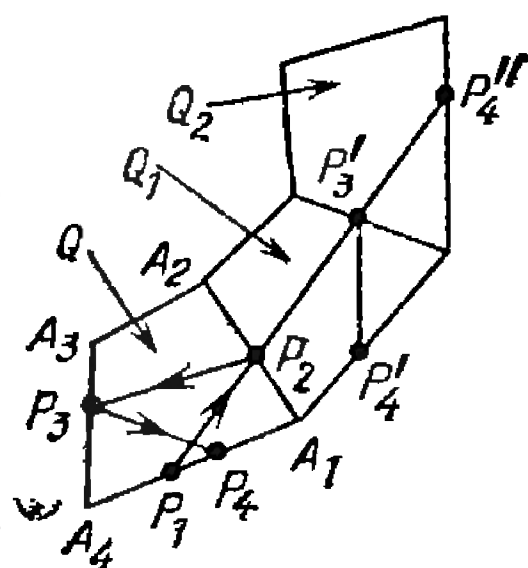


Рис. 7.2

$P_2P_3$ , является продолжением отрезка  $P_1P_2$ , и первый кусок ломаной  $P_1P_2P_3P_4 \dots - P_1P_2P_3$  — нами выпрямлен. Теперь отразим второй (полученный из  $Q$  при первом отражении) многоугольник  $Q_1$  относительно той его стороны, на которой лежит следующая точка излома  $P'_3$ . Получим следующий многоугольник  $Q_2$ , и образ звена  $P'_3P'_4$  при новом отражении будет, опять-таки, продолжением отрезка  $P_1P_2P'$ . Продолжая так и далее, мы можем любой

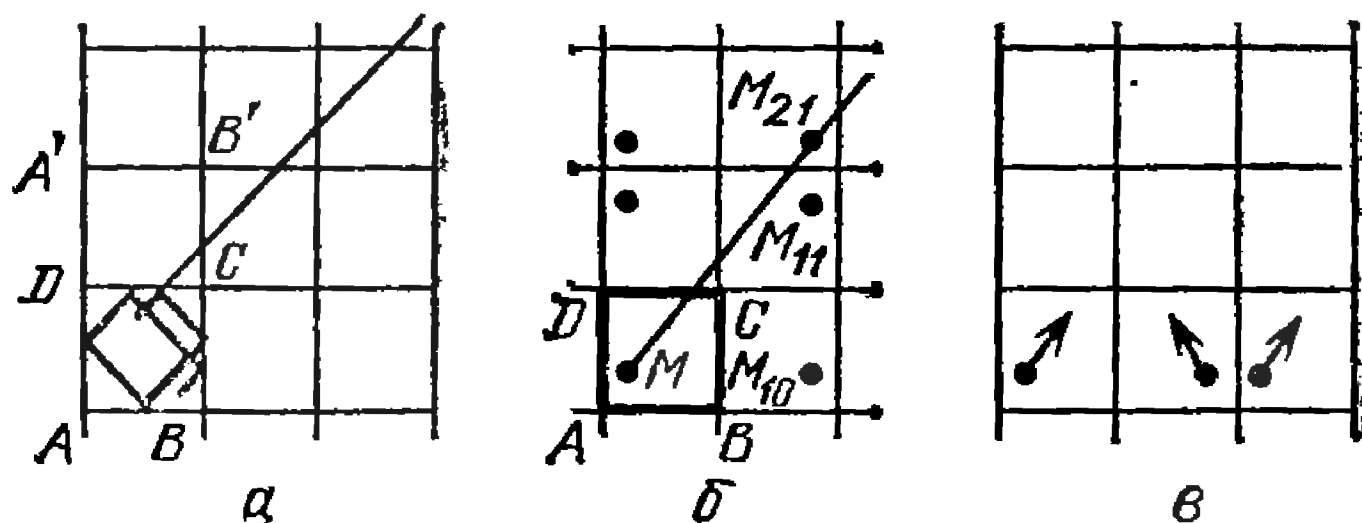


Рис. 7.3

кусок ломаной  $P_1P_2P_3P_4 \dots$  «выпрямить», т. е. последовательными отражениями превратить в отрезок прямой  $P_1P_2P'_3P''_4 \dots$ .

Конечно, для разных траекторий придется делать различные последовательности выпрямляющих отражений. Однако если мы рассматриваем бильярд в прямоугольнике, мы можем с самого начала с помощью отражений замостить всю плоскость прямоугольниками, равными данному, получив решетку из прямоугольников. Нарисовав на этой плоскости произвольный луч, не проходящий ни через одну из вершин получившихся прямоугольников, мы можем с помощью процедуры, обратной описанной, «сложить» этот луч в траекторию бильярда в исходном прямоугольнике  $ABCD$  (рис. 7.3, а). Заметим, что при таком «складывании» решетки прямоугольников в исходный прямоугольник  $ABCD$  в каждую точку  $M$  прямоугольника  $ABCD$  попадает бесконечно много точек  $M_{m,n}$  плоскости — именно, все те точки, которые получаются из  $M$  описанными выше отражениями (рис. 7.3, б).

Если траектория, выходящая из точки  $M$  под углом  $\alpha$  к стороне  $AB$ , периодична, то это означает, что после выпрямления из этой траектории получится прямая, проходящая через  $M$  и через одну из точек  $M_{m_0, n_0}$ . Если пронумеровать точки  $M_{m,n}$  индексами  $m$  и  $n$ , как указано на рис. 7.3, б, то точка  $M_{m_0, n_0}$  должна быть такой, что  $m_0$  и  $n_0$  —



четные числа. Именно (и только) в этом случае бильярдный шар проходит через ту же точку  $M$  под *прежним* углом  $\alpha$ : номера  $m_0$  и  $n_0$  показывают, сколько нужно сделать отражений относительно вертикальных и горизонтальных сторон прямоугольников, чтобы получить из точки  $M_{m_0, n_0}$  точку  $M$ ; при этом нечетное число отражений меняет направление, четное же — не меняет (см. рис. 7.3, в).

Докажем, что *неособая траектория, выходящая из точки  $M$  прямоугольника  $ABCD$  под углом  $\alpha$  к стороне  $AB$ , периодична в том и только в том случае, когда тангенс ее угла наклона  $k = \operatorname{tg} \alpha$  соизмерим с отношением сторон  $a_2/a_1$  прямоугольника  $ABCD$ .*

Действительно, только что было выяснено, что периодичны те и только те траектории, которые (после выпрямления) соответствуют прямым, идущим из точки  $M$  в одну

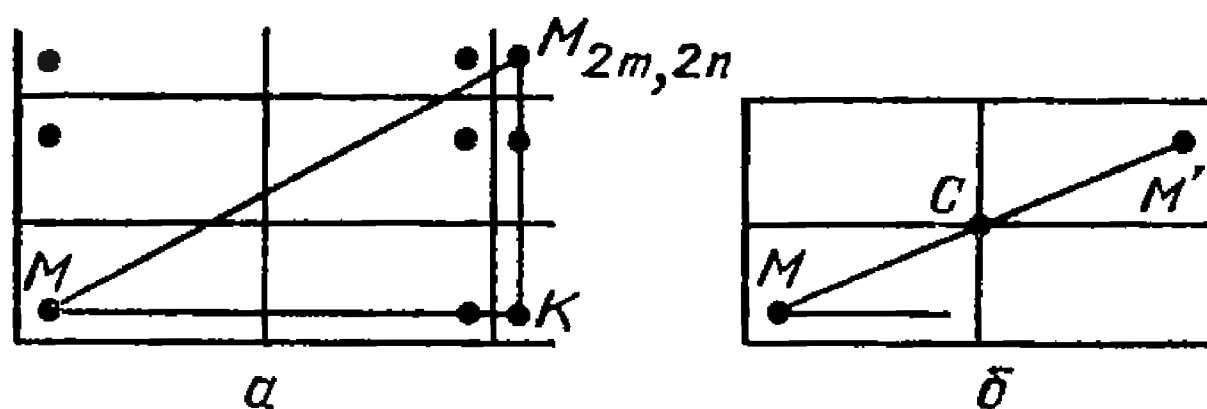


Рис. 7.4

из точек вида  $M_{2m, 2n}$ . Заметим теперь, что точка  $M_{2m, 2n}$  получается из  $M$  сдвигом на вектор  $2m \cdot \vec{AB} + 2n \cdot \vec{AD}$  (докажите это: рис. 7.4, а), так что  $\triangle MM_{2m, 2n}K$  имеет катеты с длинами  $MK = 2ma_1$  и  $M_{2m, 2n}K = 2na_2$ . Таким образом,

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2ma_2}{2na_1} = \frac{m}{n} \frac{a_2}{a_1},$$

т. е.  $k$  соизмеримо с  $a_2/a_1$ . Обратно, если число  $k$  соизмеримо с  $a_2/a_1$ , т. е.  $k = \frac{m}{n} \frac{a_2}{a_1}$ , то любая прямая, выходящая из точки  $M$  с тангенсом угла наклона  $k$ , проходит через точку, получающуюся из  $M$  сдвигом на вектор  $2m \cdot \vec{AB} + 2n \cdot \vec{AD}$ , т. е. через точку  $M_{2m, 2n}$  (проверьте!). Если эта прямая не проходит через вершины прямоугольников, то ей соответствует неособая периодическая траектория, что и требовалось доказать.

Заметим, что в рассматриваемом случае мы все-таки можем продолжить и любую особую, т. е. заканчивающуюся в одной из вершин прямоугольника, траекторию за эту вершину: ничто не мешает на плоскости, замощенной нашими прямоугольниками, продолжить, например,  $MC$  за вершину  $C$  (рис. 7.4, б), и считать тем самым, что, попав в вершину  $C$ , бильярдный шар вылетает из нее по тому же пути, по какому он туда залетел — после соответствующих отражений луч  $CM'$  совмещается с лучом  $CM$ . Таким образом, в случае бильярда в прямоугольнике можно считать, что движение по любой траектории продолжается неограниченно во времени (например, дважды проходима диагональ  $AC$  прямоугольника — это периодическая траектория).

Из доказанного утверждения следует

**Т е о р е м а 1.** *Если тангенс угла наклона  $k$  траектории соизмерим с числом  $k_0 = a_2/a_1$ , то независимо от начального положения бильярдного шара его движение будет периодическим; в противном случае траектория непериодична.*

Итак, с помощью теоремы 1 мы научились по начальному звену траектории шара определять, является ли эта траектория периодической или непериодической. Для этого надо найти отношение длин сторон прямоугольника или, что то же самое, тангенс угла наклона диагонали прямоугольника и тангенс угла, под которым запущен шарик, и поделить первое число на второе: если в результате получится рациональное число, то траектория периодична, если же — иррациональное, то непериодична. Кстати, отсюда сразу следует также и то обстоятельство, что для фиксированного начального вектора скорости шара траектория будет периодической или непериодической независимо от его начального положения на прямоугольном столе. Поэтому, если запустить параллельно друг другу сразу несколько бильярдных шаров, они либо одновременно опишут периодические траектории, либо никогда не пройдут по своему старому следу. Последовательность отражений этих шаров от бортов бильярда будет различной, если они находятся достаточно далеко друг от друга. Если же шары находятся достаточно близко, то последовательность бортов, от которых они отражаются, будет одной и той же (рис. 7.5, а). Если первое звено траектории одного бильярдного шара окружить параллельными звеньями целого семейства траекторий других шаров, то полученные траектории, в случае, когда они периоди-

ческие, заполнят самопересекающийся «коридор» (рис. 7.5, б). Таким образом, зная одну периодическую траекторию, мы параллельным сдвигом ее звеньев получаем другую периодическую траекторию.



Рис. 7.5

**З а д а ч а 7.1.** а) Доказать, что у всех неособых «параллельных» периодических траекторий в прямоугольнике равное число звеньев и равные длины. б)\* Доказать, что в прямоугольнике существуют сколь угодно длинные периодические траектории.

**Р е ш е н и е.** Это следует из рассмотрения выпрямленных траекторий, изображающихся на решетке прямоугольников равными параллельными отрезками.

**З а д а ч а 7.2.** У края бильярда, имеющего форму правильного  $2n$ -угольника, стоит шар. Как надо запустить шар от борта, чтобы он, отразившись по разу от всех бортов, вернулся в ту же точку? Доказать, что при этом длина пути шара не зависит от выбора начальной точки.

Как же ведет себя на прямоугольном столе не периодическая бильiardная траектория? В круге и эллипсе, как мы помним, непериодическая траектория не заходила в некоторые участки — в концентрический круг и, соответственно, в софокусный эллипс (или в криволинейные сегменты софокусной гиперболы), однако заполняла всюду плотно кольцо между их границами. В прямоугольнике она уже заходит во все его участки и заполняет его *всюду плотно*. В этом и состоит основной результат о непериодических траекториях в прямоугольном бильярде.

**Т е о р е м а 2.** Если  $k/k_0$  — иррациональное число, то любая траектория с угловым коэффициентом  $k$  всюду плотно заполняет весь прямоугольник, т. е. пересекает любой (сколь угодно малый) круг, лежащий внутри него.

Таким образом, если точечный бильiardный шар запустить из любого положения  $M$  в любом направлении  $\alpha$  таком, что число  $\text{tg } \alpha / \text{tg } \varphi$  иррационально, где  $\varphi$  — угол наклона диагонали к горизонтальной стороне, то он рано или поздно столкнется с другим, уже неточечным бильiardным шаром (диском)  $N$ , куда бы мы его ни поставили и сколь бы мал он ни был! Следовательно, игрокам (в случае отсутствия трения) не нужно особенно стараться, чтобы попасть в другой шар (или лузу!), надо лишь иметь терпение и время, чтобы дожидаться нужного столкновения.

Доказательство теоремы 2 будет дано в § 9 и будет опираться, как и в случае круга, на теорему Якоби.

Наметим здесь лишь краткую схему ее доказательства. По прямоугольнику  $ABCD$  будет построен «фундаментальный» прямоугольник вчетверо больших размеров, в котором исходная бильярдная траектория превратится в «скачущую» со стороны на сторону траекторию; для избавления от этих «скачков» граница фундаментального прямоугольника будет специальным образом склеена, и в результате склейки получится замечательная поверхность — тор («бублик»), на котором «скачущая» траектория превратится уже в непрерывную кривую. Исследование этой кривой и приведет к доказательству теоремы 2.

Примечательно, что для прямоугольного бильярда справедлива следующая альтернатива: либо траектория бильярда периодична, либо всюду плотно заполняет прямоугольник. В гл. 9 выяснится, что это верно не для всякого выпуклого многоугольника (при выяснении опять будет использована теорема Якоби!).

**Задача 7.3\*.** Найдите критерий периодичности бильярдных траекторий в равностороннем треугольнике.

**Задача 7.4\*.** Укажите все многоугольники  $Q$ , которыми с помощью описанных выше последовательных отражений можно замостить плоскость без перекрытий и так, чтобы любая цепочка последовательных отражений, при которой из  $Q$  получается какой-то многоугольник  $Q'$ , давала один и тот же результат. (Например, правильными шестиугольниками можно замостить плоскость, однако последнее требование здесь не выполнено — от шестиугольника  $Q$  к соседней ячейке  $Q'$  можно прийти двумя способами — с помощью одного отражения относительно  $AF$  и с помощью композиции двух отражений — относительно  $AB$  и затем относительно

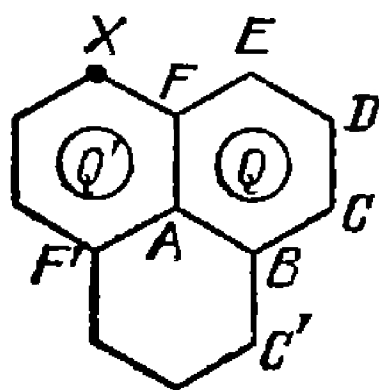


Рис. 7.6

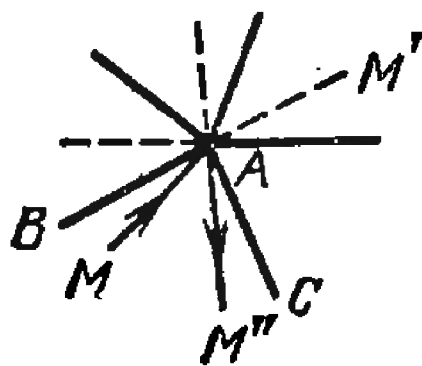


Рис. 7.7

$AF'$  (рис. 7.6). Результаты будут разные — скажем, в вершину, обозначенную буквой  $X$ , в первом случае переходит вершина  $E$ , во втором — вершина  $C$ .

**З а м е ч а н и е.** Задача 7.4 и другие близкие вопросы обсуждаются в статье А. Н. Виленкина «Калейдоскопы» (Квант. 1972. № 8. С. 41—49), правда в другой связи.

**Задача 7.5.** Пусть бильярдная траектория  $MA$  попадает в вершину  $A$  угла  $BAC$  величины  $\alpha$ . С помощью последователь-

ных отражений замостим часть плоскости углами той же величины (рис. 7.7), продолжим  $MA$  за вершину  $A$  и обратными отражениями построим луч  $AM''$ . Казалось бы, тем самым мы можем определить, как выходит бильярдный шар из вершины угла (под направлением  $AM''$ ). Однако здесь может возникнуть неоднозначность, ибо последовательные отражения исходного угла можно начать со стороны  $AB$  или со стороны  $AC$ , и может оказаться, что от этого зависит направление  $AM''$ . Рассмотрите случай угла  $\alpha = 2\pi/3$ . Выясните, для каких углов  $\alpha$  упомянутая неоднозначность не возникает.

**Задача 7.6.** В прямоугольном бильярде из точки  $A$  посылается шар параллельно диагонали. Найти множество таких точек  $M$  в бильярде, что второй шар, посланный из точки  $M$  одновременно с первым и с той же скоростью (как по величине, так и по направлению), столкнется с ним.

**Задача 7.7.** В точечное отверстие границы прямоугольного бильярда влетает бильярдный шар. Может ли шар с некоторого момента начать двигаться внутри бильярда по замкнутой траектории? А если бильярд не прямоугольный? (Указание: поменяйте скорость шара на противоположную.)

**Задача 7.8.** В прямоугольном бильярде шар движется по замкнутой траектории. Угол между какими-то двумя соседними звеньями равен  $90^\circ$ . а) Может ли у траектории быть 4 звена? Если да, то при каком соотношении сторон? б) А может ли быть 5 звеньев? 6 звеньев? 17 звеньев? 18 звеньев?

**Задача 7.9.** В прямоугольном бильярде произвольным образом запущены два неточечных шара под углами  $\alpha$  и  $\beta$  к одному борту, причем  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{tg} \beta$  иррациональны. Обязательно ли они когда-либо столкнутся?

**Задача 7.10.** Из вершины прямоугольного бильярда размером  $m \times 2n$ , где  $m$  и  $n$  — целые нечетные числа, под углом  $45^\circ$  к стороне послан шар. Попадет ли он после нескольких отражений от бортов: а) в противоположную вершину; б) в соседнюю вершину (рассмотреть два случая соседней вершины); в) в середину какой-либо стороны? г) Сможет ли шар побывать в середине двух противоположных сторон?

**Задача 7.11.** Как будет вести себя шар в прямоугольном бильярде из задачи 7.10, если его выпустить из вершины под углом  $30^\circ$ ?  $60^\circ$ ?

**Задача 7.12.** а) Запишем стороны прямоугольного бильярда числами 1, 2, 3, 4. Пусть в нем движется шар, траектория которого непериодическая. Выпишем подряд номера всех сторон, о которые отражался шар:  $n_1, n_2, n_3, \dots$ . Может ли полученная последовательность оказаться периодической?

б)\* Решите ту же задачу для непериодической траектории  $\gamma$  в произвольном выпуклом  $k$ -угольнике, стороны которого занумерованы числами от 1 до  $k$ .

**Решение.** Докажем, что последовательность  $n_1, n_2, \dots$  — непериодическая, от противного.

Пусть период последовательности  $n_1, n_2, \dots$  равен  $T$ , причем  $T$  четно (в противном случае рассмотрим удвоенный период). Выпишем траекторию  $\gamma$  шарика, сделав последовательные отражения  $k$ -угольника относительно сторон  $n_1, n_2, n_3, \dots$ . Получим коридор из одинаковых  $k$ -угольников  $M_1, M_2, M_3, \dots$ , содержащий прямую  $l$  — выпрямленную траекторию  $\gamma$ .

Рассмотрим в этом коридоре  $k$ -угольники  $M_1$  и  $M_{T+1}$ .  $k$ -угольник  $M_{T+1}$  может быть получен из  $M_1$  либо параллель-

ным переносом на некоторый вектор  $a$ , либо параллельным переносом и поворотом. Во втором случае  $M_{T+1}$  получается из  $M_1$  одним поворотом с центром в некоторой точке  $O$  на некоторый угол  $\alpha$ . А тогда в цепочке многоугольников  $M_1, M_{T+1}, M_{2T+1}, \dots$  каждый из них получается из предыдущего либо параллельным переносом на один и тот же вектор  $a$ , либо поворотом на один и тот же угол  $\alpha$  с центром  $O$ . Во втором случае весь коридор располагался бы в ограниченной части плоскости и поэтому не мог бы содержать прямую  $l$ . Следовательно, возможен только первый случай: *многоугольники в указанной цепочке получаются последовательно друг из друга параллельным переносом на вектор  $a$* . А тогда все звенья траектории  $\gamma$  с номерами  $1, T+1, 2T+1, \dots$  в исходном многоугольнике  $M_1$  параллельны друг другу. Если они начинаются в различных точках  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  одной и той же стороны многоугольника  $M_1$ , то нетрудно видеть, что  $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots$ . Это противоречит тому, что все эти точки лежат на одной стороне многоугольника, поскольку сумма  $A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \dots$  бесконечна. Таким образом, все точки  $A_1, A_2, \dots$  совпадают, а потому совпадают и звенья траектории  $\gamma$  с номерами  $1, T+1, 2T+1, 3T+1, \dots$ , т. е.  $\gamma$  — периодическая траектория, что противоречит условию задачи.

**З а м е ч а н и е.** В пространственном многограннике последовательность  $n_1, n_2, n_3, \dots$  номеров граней, от которых отражается бильярдный шар, может быть периодической, несмотря на то, что траектория шара  $\gamma$  непериодическая. Это связано с тем, что в пространстве кроме параллельных переносов и поворотов вокруг осей имеются еще и винтовые движения: повороты вокруг осей со сдвигами вдоль них. В этом случае множество точек отражения шара от любой из граней  $n_k$  заполняет всюду плотно некоторый эллипс на этой грани.

## § 8. Тор и его обмотки

Временно оставим бильярды в прямоугольнике и обратимся к весьма важным поверхностям, часто встречающимся в механике — к тора́м. *Тором* называется поверхность, получающаяся при вращении окружности  $S^1$  относительно непересекающей эту окружность прямой  $MN$ ,

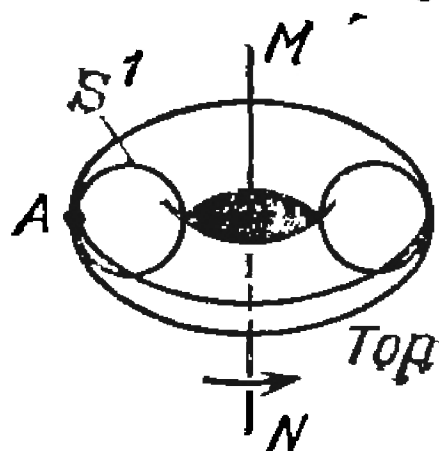


Рис. 8.1

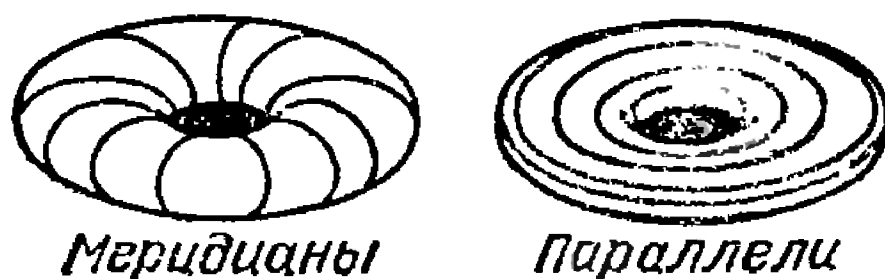


Рис. 8.2

лежащей в плоскости окружности (рис. 8.1). Форму тора имеют надувной спасательный круг, автомобильная камера, поверхность бублика. На торе, как и на сфере,



можно провести *меридианы* — линии пересечения тора со всевозможными плоскостями, проходящими через ось вращения  $MN$ , и *параллели* — окружности, получающиеся из точек исходной окружности при вращении относительно  $MN$  (рис. 8.2). Выбрав на торе «гринвичский меридиан» и «экватор», т. е. зафиксировав меридиан и параллель,

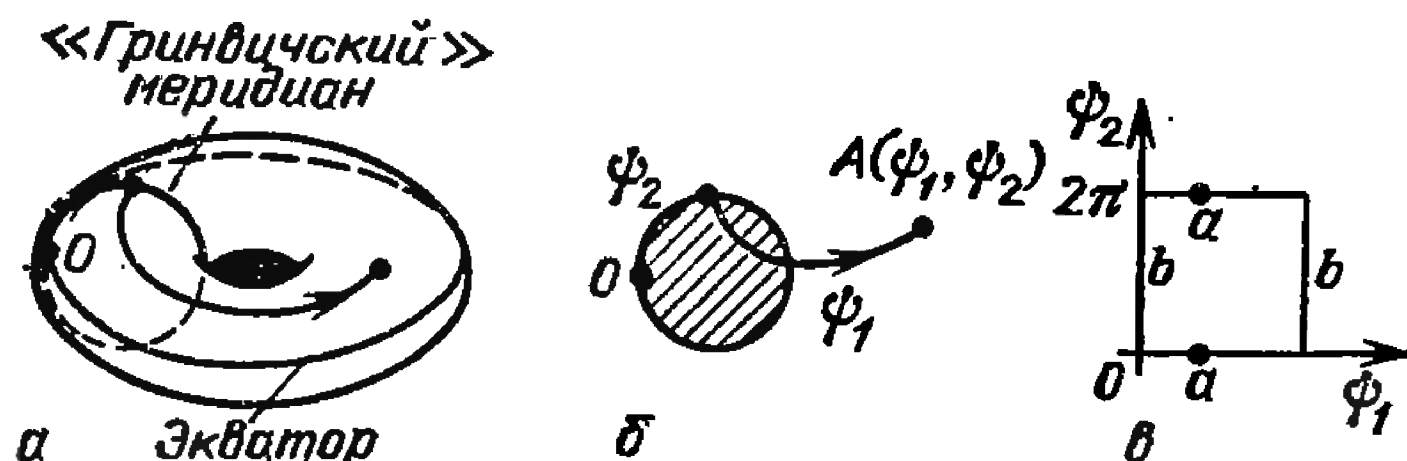


Рис. 8.3

можно ввести на нем долготу  $\psi_1$ , отсчитываемую по параллелям от выбранного меридиана, и широту  $\psi_2$ , отсчитываемую по меридианам от экватора (рис. 8.3, а). Более точно, точка  $A$  тора  $\mathbb{T}$  имеет координаты  $(\psi_1, \psi_2)$ , если она получается из точки  $O$  пересечения выбранных линий поворотом на угол  $\psi_2$  вдоль меридиана и последующим поворотом на угол  $\psi_1$  относительно оси  $MN$  (оба поворота осуществляются в выбранных направлениях; рис. 8.3, б). Углы  $\psi_1$  и  $\psi_2$  будем измерять в радианах; плоская (как в географии) карта тора представляет собой квадрат на плоскости

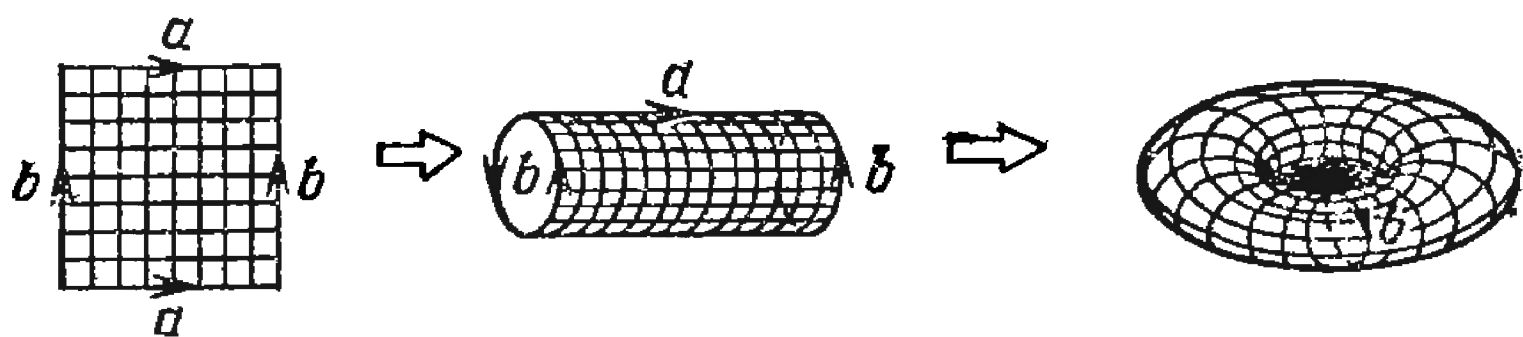


Рис. 8.4

$0 \leq \psi_1 < 2\pi, 0 \leq \psi_2 < 2\pi$ . Точки экватора ( $\psi_2 = 0$  или  $2\pi$ ) и «гринвичского меридиана» ( $\psi_1 = 0$  или  $2\pi$ ) представлены на этой карте дважды — точки нижней и верхней стороны квадрата, лежащие на одной вертикали (т. е. точки вида  $(\psi_1, 0)$  и  $(\psi_1, 2\pi)$ ) изображают *одну и ту же точку* на торе; аналогично, точки левой и правой сторон квадрата, лежащие на одной горизонтали, изображают также *одну и ту же точку*. Будем считать карту резиновой и склеим упомянутые точки; на рис. 8.4 склеиваемые стороны обозначены одинаковыми буквами ( $a, b$ ) со стрелками, показывающими, как нужно склеивать эти стороны (стрелку

со стрелкой — в том же направлении). Как и следовало ожидать, в результате получим тор, а сетка горизонталей и вертикалей на карте превратится в сетку параллелей и меридианов на торе. Иногда тор и определяют, как поверхность, получающуюся из «резинового» квадрата указанной склейкой.

Рассмотрим теперь простейшее движение точки по тору: пусть точка  $A$  движется так, что ее широта и долгота меняются *равномерно* — с постоянными скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

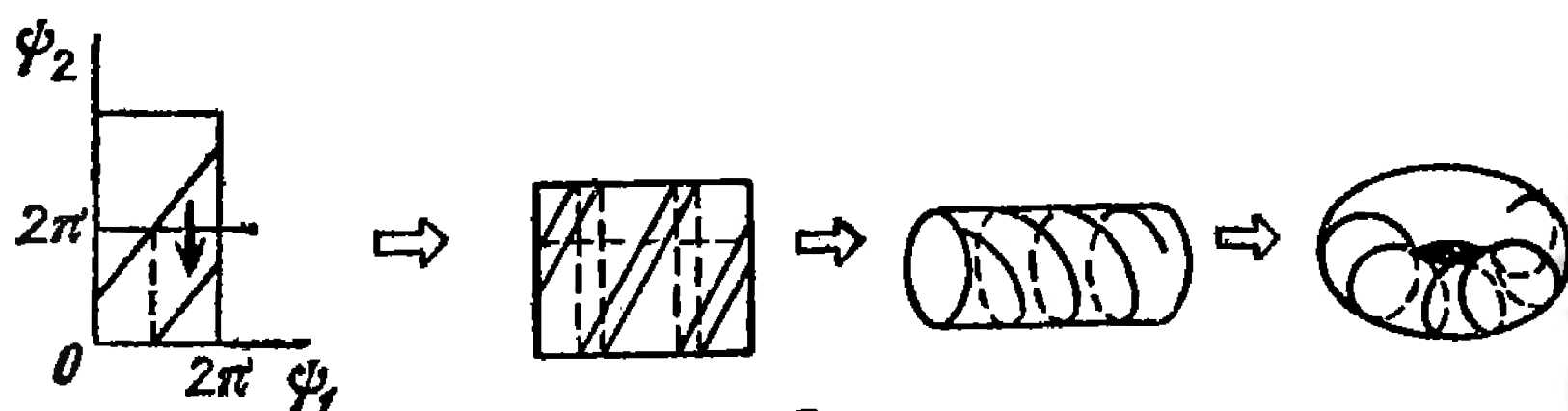


Рис. 8.5

В этом случае можно написать формулы для зависимости  $\psi_1$  и  $\psi_2$  от времени  $t$ :

$$\psi_1 = \alpha + \omega_1 t, \quad \psi_2 = \beta + \omega_2 t.$$

Здесь имеется в виду, что, как и в тригонометрии, мы позволяем координатам  $\psi_1$  и  $\psi_2$  принимать произвольные (бóльшие  $2\pi$  и отрицательные) значения, однако не забываем, что для любых целых  $m$  и  $n$  точка с координатами  $(\psi_1 + 2\pi m, \psi_2 + 2\pi n)$  совпадает с точкой с координатами  $(\psi_1, \psi_2)$ . На всей плоскости  $O\psi_1\psi_2$  написанные уравнения задают прямую  $\psi_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \psi_1 + \gamma$ . Учтем теперь, что в действительности мы должны считать, что  $\psi_1$  и  $\psi_2$  меняются лишь от 0 до  $2\pi$ , так что как только точка, движущаяся по этой прямой, доходит до одной из сторон квадрата, являющегося картой тора, эта точка «перескакивает» в соответствующую точку противоположной стороны квадрата и продолжает двигаться по квадрату в том же направлении, что и раньше — до следующего перескакивания (рис. 8.5). Таким образом, на карте соответствующий «маршрут» — траектория движения — состоит из отрезков, параллельных друг другу; после склейки квадрата в тор эти отрезки склеиваются к *непрерывную кривую* на торе — она обматывает тор с «угловыми» скоростями  $\omega_1$  по экватору и  $\omega_2$  по меридиану (на промежуточном этапе склейки мы получаем движение по винтовой линии на цилиндре с соответствующим перескакиванием в одного его основания

на другое). Эта кривая называется *траекторией обмотки тора с частотами*  $(\omega_1, \omega_2)$ .

Выясним, когда траектория обмотки тора с частотами  $(\omega_1, \omega_2)$  является замкнутой (периодической).

Если  $\omega_1 = 0$ , то траектория — это меридиан, и движение по нему периодически с периодом  $T_2 = 2\pi/\omega_2$ . Если  $\omega_2 = 0$ , то происходит периодическое движение по параллели. Пусть обе частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  отличны от 0. Тогда через промежутки времени, кратные  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ , движущаяся точка оказывается на одном и том же меридиане, а через промежутки времени, кратные  $T_2 = 2\pi/\omega_2$ , точка оказывается на одной и той же параллели. Движение перио-

дично тогда и только тогда, когда через некоторое время  $T$  точка окажется в том же первоначальном месте, т. е. на тех же параллели и меридиане. Для этого нужно, чтобы этот промежуток времени  $T$  был кратен как  $T_1$ , так и  $T_2$ ,

т. е.  $T = mT_1$  и  $T = nT_2$  с целыми  $m$  и  $n$ . Таким образом, необходимое и достаточное условие периодичности движения — это существование натуральных  $m$  и  $n$  таких, что  $mT_1 = nT_2$ , т. е.  $m \cdot 2\pi/\omega_1 = n \cdot 2\pi/\omega_2$ ; последнее означает, что число  $\omega_2/\omega_1$  рационально ( $\omega_2/\omega_1 = m/n$ ).

Итак, если  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , скажем, положительны и соизмеримы друг с другом, то любая траектория обмотки с частотами  $\omega_1, \omega_2$  периодична. На торе это будет замкнутая кривая, причем если  $\omega_2/\omega_1$  — несократимая дробь, то эта кривая  $n$  раз обходит тор вдоль параллели и  $m$  раз — вдоль меридиана. Такая кривая называется *циклом типа*  $(m, n)$ .

На рис. 8.6, а изображен цикл типа  $(3, 1)$ , а на рис. 8.6, б — цикл типа  $(3, 2)$ .

Из полученных рассуждений вытекает, что в случае несоизмеримых частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  траектория обмотки будет *непериодической*.

Как же она будет обматывать тор? Ответ на этот вопрос дает

**Т е о р е м а.** Если число  $\omega = \omega_2/\omega_1$  иррационально, то любая траектория соответствующей обмотки тора всюду плотна на торе, т. е. проходит через любую (сколь угодно малую) область на торе.

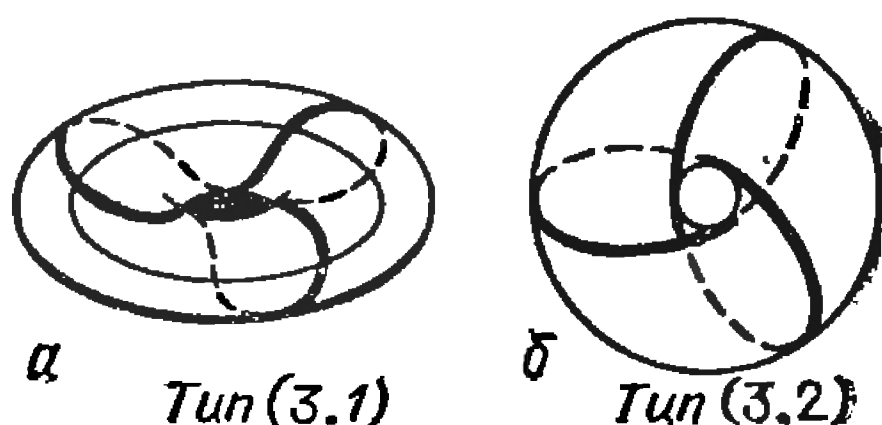


Рис. 8.6

**Доказательство.** Пусть  $U$  — произвольная область на торе; проведем меридиан  $S$  тора, пересекающий область  $U$  по дуге  $\Delta$  (рис. 8.7), и рассмотрим последовательные точки пересечения траектории обмотки тора с этим меридианом —  $P_0, P_1, P_2, \dots$ . Точка, двигаясь вдоль траектории, возвращается на меридиан  $S$  через промежутки времени, равные  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ . За каждый такой промежуток времени долгота точки  $\psi_2$  меняется на одну и ту же величину  $\varphi = \omega_2 T_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot 2\pi = \omega \cdot 2\pi$ . Это означает, что точка  $P_n$

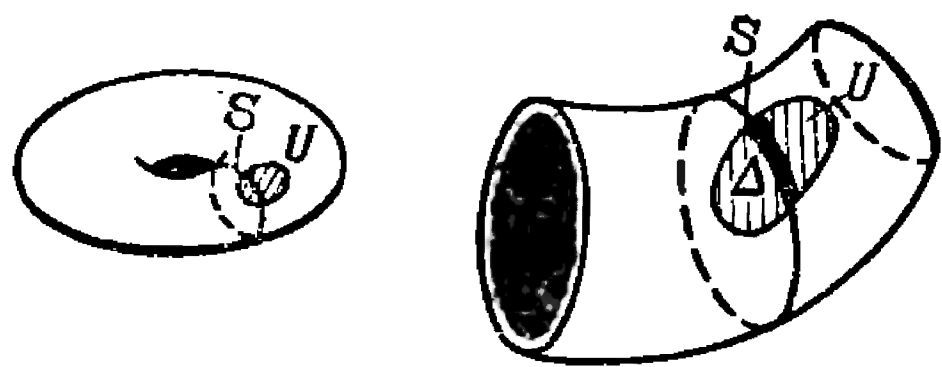


Рис. 8.7

предыдущей точки пересечения  $P_{n-1}$  поворотом на угол  $\varphi = \omega \cdot 2\pi$  вдоль этого меридиана. В случае иррациональности  $\omega$  из теоремы Якоби вытекает, что хотя бы одна из точек  $P_n$  попадет на

дугу  $\Delta$ . Следовательно, траектория пересечет область  $U$ , что и требовалось доказать.

Отметим также, что, поскольку последовательность точек  $P_n$  на меридиане  $S$  не только всюду плотна, а еще и равномерно распределена (т. е. точка  $P_n$  попадает в произвольную дугу  $\Delta$  меридиана  $S$  с вероятностью, равной отношению ее длины к длине меридиана) и аналогичное утверждение имеет место и для произвольной параллели на торе, траектория обмотки тора с иррациональным  $\omega$  заполняет тор равномерно, т. е. движущаяся равномерно вдоль этой траектории точка проводит в наперед заданной области  $U$  тора время, пропорциональное ее площади.

Зафиксировав частоты обмотки  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , мы можем через каждую точку тора провести траекторию этой обмотки и рассмотреть все эти траектории сразу. Они образуют так называемый поток траекторий, или иначе, обмотку тора (до сих пор речь шла только о траекториях обмотки). Если число  $\omega = \omega_2/\omega_1$  рационально, то обмотка называется рациональной, в противном случае говорят об иррациональной обмотке тора. Все траектории рациональной обмотки тора периодичны (с одним и тем же периодом), а любая траектория иррациональной обмотки всюду плотно заполняет тор.

Можно интерпретировать упомянутые потоки так: на торической планете Тор дует ветер — так, что на квадрате (карте тора) направление ветра одинаково во всех точках — под углом  $\alpha$  к оси  $O\psi_1$  (рис. 8.8, а). Сев на воздушный шар, мы полетим по ветру. Если нам повезет с погодой —  $\operatorname{tg} \alpha$  окажется *иррациональным*, — то наше путешествие будет весьма познавательным, ибо мы побываем (благодаря только ветру, который, по предположению, не меняется) над всеми уголками торической планеты!

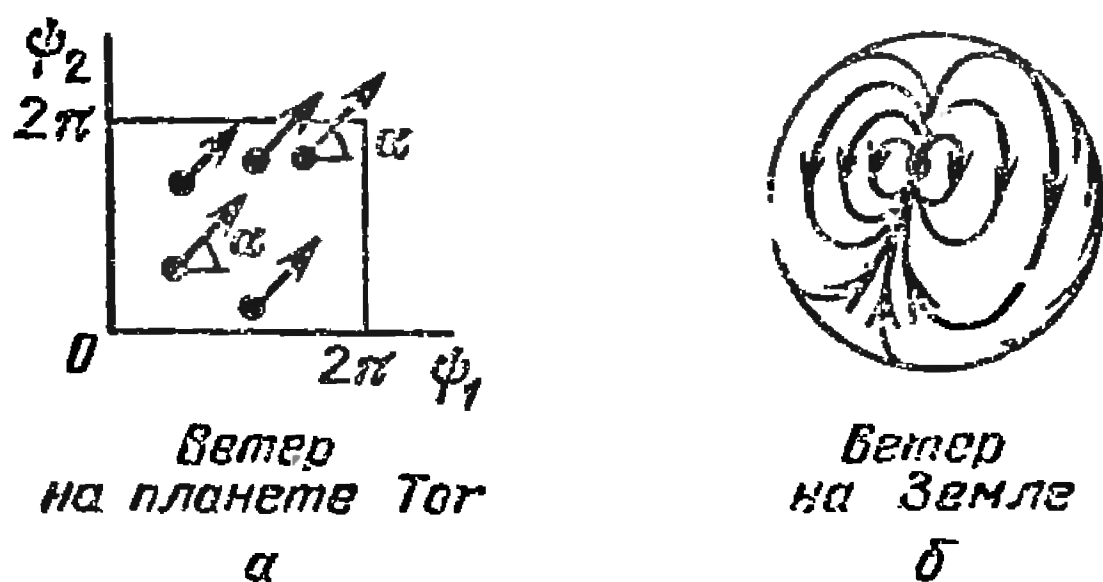


Рис. 8.8

Если же  $\operatorname{tg} \alpha$  будет *рациональным*, мы совершим «объёмное кругосветное путешествие», вернувшись в ту же точку. (На сферической Земле такого ветра не бывает — это весьма сложная теорема. Более простой, но нетривиальный факт заключается в том, что в любой момент времени на Земле найдется хотя бы одна точка, в которой нет ветра! (рис. 8.8, б). Существование таких «ветров» на торе и является причиной того, что эта поверхность часто появляется в задачах механики. Объяснение же такой исключительности тора состоит в том, что его так называемая эйлерова характеристика равна нулю. Об эйлеровой характеристике поверхностей см. § 23; более подробно об этом и о связи эйлеровой характеристики со свойствами «ветров» на поверхности — теоремой Пуанкаре о сумме индексов векторного поля — можно прочитать в книге В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича «Наглядная топология» («Библиотечка «Квант», 1982. Вып. 21).

**З а м е ч а н и е** о б о б м о т к а х т о р а. Кроме конкретного представления тора в виде поверхности бублика, его можно представить и абстрактно, как множество пар точек  $(\psi_1, \psi_2)$ , где  $\psi_1$  и  $\psi_2$  независимо друг от друга принимают произвольные значения от 0 до  $2\pi$ , т. е. можно считать, что точки  $\psi_1$  и  $\psi_2$  движутся каждая равномерно по своей окружности, а тор  $\{(\psi_1, \psi_2)\}$  — это *конфигурацион-*

ное пространство этих точек. Именно поэтому говорят, что «тор есть прямое произведение окружностей» и записывают это в виде  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ . Если при этом отношение угловых скоростей  $\omega_2/\omega_1$  движущихся по окружностям точек иррационально, то это означает, что конфигурационная траектория точки  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  на торе всюду плотно его заполняет, и следовательно, точки  $\psi_1$  и  $\psi_2$  на своих окружностях в некоторый момент времени будут находиться почти в первоначальном (т. е. в сколь угодно близком к нему) положении. Аналогично, если имеется  $n > 2$  окружностей, по которым равномерно движутся точки  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , то их конфигурационным пространством будет поверхность  $n$ -мерного тора  $\mathbb{T}^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$  ( $n$  раз), расположенного в  $2n$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^2$  ( $n$  раз) (абстрактный двумерный тор  $\mathbb{T}^2$  можно считать вложенным в 4-мерное пространство  $\mathbb{R}^4$ ), по которому движется одна конфигурационная точка  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ , где  $0 \leq \psi_i \leq 2\pi$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Если  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  — угловые скорости движения точек  $P_1, \dots, P_n$  по окружностям, т. е.  $\psi_1 = \omega_1 t + \varphi_1, \dots, \psi_n = \omega_n t + \varphi_n$ , где  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — фазы (начальные положения точек на окружностях), то точка  $\psi(t) = (\omega_1 t + \varphi_1, \dots, \omega_n t + \varphi_n)$  описывает на торе  $\mathbb{T}^n$  траекторию обмотки. Оказывается, эта траектория, как и в случае двумерного тора, либо замкнута, либо всюду плотно заполняет некоторый тор  $\mathbb{T}^k$ ,  $k \leq n$ . (В механике торы  $\mathbb{T}^n$  называются лиувиллевскими торами, а равномерное движение точки по тору — «условно-периодическим» движением.) Замкнутой траектория будет, если  $k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n = 0$  при некоторых целых  $k_1, \dots, k_n$ , а всюду плотной — если таких целых чисел нет.

Это замечание дает возможность быстро решить непростые задачи 8.7—8.10.

**Задача 8.1.** Какая поверхность получится, если у прямоугольника (рис. 8.4) склеить сначала стороны  $b$ , а потом стороны  $a$ ?

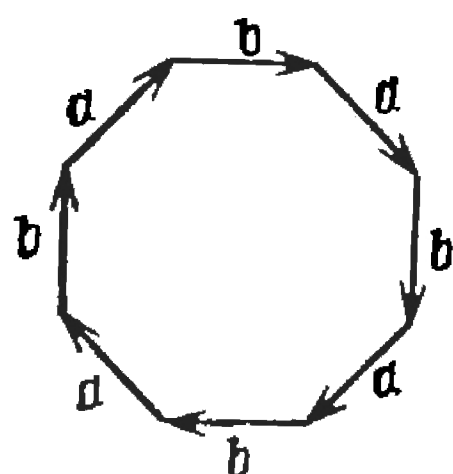


Рис. 8.9

**Задача 8.2.** Рассмотрим «резиновый» шестиугольник и склеим попарно его противоположные стороны. Какая поверхность при этом получится?

**Задача 8.3.** Какая поверхность получится после попарной склейки противоположных сторон правильного восьмиугольника?

**Задача 8.4.** Какая поверхность получится, если склеить стороны восьмиугольника так, как указано на рис. 8.9?

**Задача 8.5.** Резиновый мяч (или глобус) можно вывернуть наизнанку, проделав в нем дырку. Можно ли подобным образом вывернуть наизнанку тор? Что в этом случае произойдет с параллелями и меридианами?



**Задача 8.6.** Нарисуем на торе цикл типа  $(m, n)$ , затем положим веревочку на эту кривую и свяжем ее концы, и, наконец, уберем (уничтожим) тор, оставив веревочку. В каких случаях на веревочке после распутывания не будет узлов? (Рассмотрите для начала цикл типа  $(3, 2)$  — см. рис. 8.6, б.)

**Задача 8.7\*.** а) Доказать, что существует такое натуральное  $n$ , что числа  $2^n$  и  $3^n$  начинаются с цифры 7 одновременно. б) Верно ли то же самое для чисел  $2^n$  и  $5^n$ ?

**Решение.** а) Мы должны найти такие натуральные числа  $n$  и  $k_1, k_2$ , чтобы одновременно выполнялись равенства  $7 \cdot 10^{k_1} \leq 2^n < 8 \cdot 10^{k_1}$  и  $7 \cdot 10^{k_2} \leq 3^n < 8 \cdot 10^{k_2}$ , или, иначе,

$$k_1 \leq n \lg 2 - \lg 7 < k_1 + \lg(8/7),$$

$$k_2 \leq n \lg 3 - \lg 7 < k_2 + \lg(8/7).$$

Если вспомнить решение задачи про первые цифры чисел  $2^n$  в конце § 2, то мы приходим к следующей ситуации: на одной и той же окружности  $S^1$  длины 1 отмечена дуга  $\Delta$  длина  $\lg(8/7)$  и точка  $P_0$  — отпечаток числа  $(-\lg 7)$  при намотке числовой оси  $\mathbb{R}^1$  на эту окружность; точка  $P_0$  «раздваивается» на две  $P'_0$  и  $P''_0$  (обе они сливаются с  $P_0$ ) и каждая из них начинает «прыгать» по окружности в одну сторону прыжками величиной  $\lg 2$  и  $\lg 3$  соответственно; в результате возникают их «следы»  $P'_1, P'_2, P'_3, \dots$  и  $P''_1, P''_2, P''_3, \dots$ . Надо доказать, что через некоторое равное число  $n$  прыжков обе эти точки окажутся на указанном интервале  $\Delta$  — это  $n$  и будет искомым.

Рассматривая конфигурационное пространство пар точек  $(P'_n, P''_n)$ , получаем двумерный тор  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ , причем угловая скорость движения конфигурационной точки  $P = (P'_n, P''_n)$  по меридиану тора (по первому экземпляру окружности  $S^1$ ) равна  $\omega_1 = \lg 2$ , а угловая скорость движения по параллели тора (второму экземпляру  $S^1$ ) равна  $\omega_2 = \lg 3$ . Если бы движение конфигурационной точки  $P$  по тору  $\mathbb{T}^2$  было непрерывным, то ее траектория заполнила бы этот тор всюду плотно. Однако движение точки  $P$  дискретно — она «скачет», меняя свое положение на торе только в целочисленные моменты времени  $t = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ , и поэтому теорему об обмотках тора применить здесь нельзя. Доказать, что множество «следов» точки  $P$  всюду плотно на торе  $\mathbb{T}^2$ , можно, если каким-то образом удастся дискретное движение точки  $P$  превратить в непрерывное так, чтобы получилась некоторая обмотка тора, но, разумеется, уже не двумерного.

Можно поступить следующим образом. Введем формально еще одну окружность, по которой запустим третью точку,  $P'''_0$ , которая будет двигаться непрерывно с постоянной угловой скоростью  $\omega_3 = 1$ . Рассмотрим конфигурационное пространство трех точек  $(P', P'', P''')$ , каждая из которых движется по своей окружности длин.: 1 — первые две движутся равномерно с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а третья движется равномерно с угловой скоростью  $\omega_3$ . Им является трехмерный тор  $\mathbb{T}^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$  и по нему конфигурационная точка  $P = (P', P'', P''')$  движется уже непрерывно, задавая обмотку тора  $\mathbb{T}^3$ . Исходный тор  $\mathbb{T}^2$  можно представлять себе расположенным в трехмерном торе  $\mathbb{T}^3$  так же, как окружность  $S^1$  в торе  $\mathbb{T}^2$  — в виде параллели (рис. 8.2); тогда рассматриваемая обмотка тора  $\mathbb{T}^3$  пересекает тор  $\mathbb{T}^2$  через равные (единичные) промежутки времени и оставляет на этой «дву-

мерной параллели» следы — точки пересечения  $P_n = (P'_n, P''_n)$ , которые являются конфигурационными точками на торе  $\mathbb{T}^2$ . Полученная обмотка тора  $\mathbb{T}^3$ , по сделанному в конце § 8 замечанию, будет всюду плотной в  $\mathbb{T}^3$ , если  $\lambda \neq k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3 \neq 0$  при всех целых  $k_1, k_2, k_3$ . В нашем случае выражение для  $\lambda$  имеет вид  $\lambda = k_1 \lg 2 + k_2 \lg 3 + k_3$ , и если бы оно принимало значение 0 при некоторых целых  $k_1, k_2, k_3$ , то  $10^\lambda = 2^{k_1} 3^{k_2} 10^{k_3} = 1$ , откуда  $k_1 = k_2 = k_3 = 0$  в силу взаимной простоты чисел 2, 3, 5. Значит,  $\lambda \neq 0$  при всех целых  $k_1, k_2, k_3$ , поэтому обмотка всюду плотна на  $\mathbb{T}^3$  и, следовательно, точки ее пересечения с  $\mathbb{T}^2$  заполняют тор  $\mathbb{T}^2$  всюду плотно, что и требовалось доказать.

б) Если первая цифра у чисел  $2^n$  и  $5^n$  равна  $x$ , то, представив эти числа в виде  $2^n = \alpha \cdot 10^n$ ,  $5^n = \beta \cdot 10^n$  ( $0 < \alpha, \beta < 1$ ), видим, что при  $x < 3$   $\alpha\beta < 1$  и поэтому произведение самих чисел меньше  $10^n$  — противоречие; при  $x > 3$   $\alpha\beta > 1$  и тогда произведение самих чисел больше  $10^n$  — опять противоречие. Поэтому остается только возможность  $x = 3$ : при перемножении  $\alpha$  на  $\beta$  «в столбик» происходит перенос единицы в разряд единиц, т. е.  $(0,3\dots) \cdot (0,3\dots)$  превращается в  $1,000\dots 0$ .

Итак, одновременно числа  $2^n$  и  $5^n$  могут начинаться только в тройки (например, при  $n = 5$ ). И это несмотря на то, что каждое из этих чисел может начинаться с произвольной цифры!

Геометрически возникшее явление объясняется тем, что построенная в пункте а) обмотка трехмерного тора уже не будет всюду плотной в нем; в силу равенства  $2 \cdot 5 = 10$  число  $\lambda = k_1 \lg 2 + k_2 \lg 5 + k_3$  может стать равным нулю при некоторых целых  $k_1, k_2, k_3$  (каких?); поэтому эта обмотка будет пересекать двумерный тор  $\mathbb{T}^2$  по множеству точек, не всюду плотному на  $\mathbb{T}^2$  (так как сама обмотка тора  $\mathbb{T}^3$  в рассматриваемом случае всюду плотно заполняет лишь некоторый двумерный тор, расположенный в  $\mathbb{T}^3$ , но не совпадающий с  $\mathbb{T}^2$ ).

Задача пункта б) предлагалась первым из авторов для решения в журнале «Квант» (1988, № 4). Предлагаем решить аналогичную задачу для троек чисел  $2^n, 3^n, 7^n$  и  $2^n, 3^n, 5^n$ .

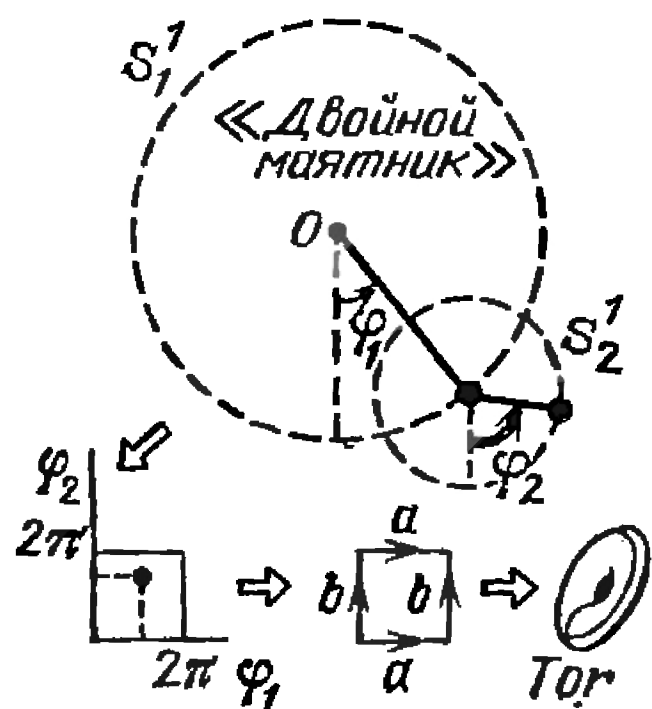


Рис. 8.10

Задача 8.8. Вокруг Солнца вращается планета с радиусом орбиты  $R$ , а вокруг нее в той же плоскости — спутник с радиусом орбиты  $r$ , причем угловые скорости их вращения неизмеримы. Доказать, что спутник заполнит всюду плотно кольцо с центром в Солнце, внутренний радиус которого равен  $(R-r)$ , а внешний —  $(R+r)$ .

З а м е ч а н и е. Указанная система «Солнце — планета — спутник» носит еще название «двойной маятник»; его конфигурационное пространство — тор  $\mathbb{T}^2$  (рис. 8.10).

Задача 8.9. Рассмотрим систему, состоящую из двух планет одинакового радиуса  $\varepsilon > 0$ , вращающихся по окружностям различных радиусов с общим центром  $O$  и расположенных в различных плоскостях (более близкая к  $O$  планета  $A$  видна под большим углом из точки  $O$ , чем планета  $B$ ). Доказать, что если отношение угловых скоростей вращения пла-

нет иррационально, то затмение более далекой планеты близкой планетой (с точки зрения наблюдателя, находящегося в центре  $O$  системы) будет происходить бесконечное число раз.

**Решение.** Затмение происходит, если в данный момент времени  $t$  планеты  $A$  и  $B$  оказываются близко к одному из двух лучей, на которые точка  $O$  разбивает прямую пересечения плоскостей орбит (рис. 8.11). Если  $(\varphi_0, \psi_0)$  — точка тора, соответствующая положению планет на таком луче  $AM$ , то затмение произойдет, если точка тора  $(\varphi, \psi)$ , соответствующая положению планет в момент времени  $t$ , удовлетворяет условию  $|\varphi - \varphi_0| + |\psi - \psi_0| < \gamma_1 - \gamma_2$ , где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — углы, под которыми видны планеты из точки  $O$ . Такие точки  $(\varphi, \psi)$  образуют квадрат с центром в точке  $(\varphi_0, \psi_0)$  и диагональю  $2(\gamma_1 - \gamma_2)$ . Если в момент времени  $t=0$  положения центров планет  $A, B$  характеризуются углами  $\alpha$  и  $\beta$ , то в произвольный момент  $t$  соответствующие им углы будут равны

$$\varphi = \omega_1 t + \alpha, \quad \psi = \omega_2 t + \beta, \quad \text{откуда} \quad \frac{\psi - \beta}{\varphi - \alpha} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \text{и} \quad \psi = \frac{\omega_2}{\omega_1} \varphi + \lambda, \quad \text{где}$$

$$\lambda = -\frac{\omega_2}{\omega_1} \alpha + \beta. \quad \text{Координаты } \varphi, \psi \text{ связаны, таким образом, линей-}$$

ным соотношением, задающим на плоскости  $O\varphi\psi$  прямую с угловым коэффициентом  $\omega_2/\omega_1$ . В силу иррациональности  $\omega_2/\omega_1$  на торе возникает иррациональная обмотка, и поэтому конфигурационная точка  $(\varphi, \psi)$  рано или поздно подойдет к точке  $(\varphi_0, \psi_0)$ , что и доказывает требуемое: *найдется бесконечное множество точек  $(\varphi, \psi)$ , для которых будет происходить затмение.* Задача решена.

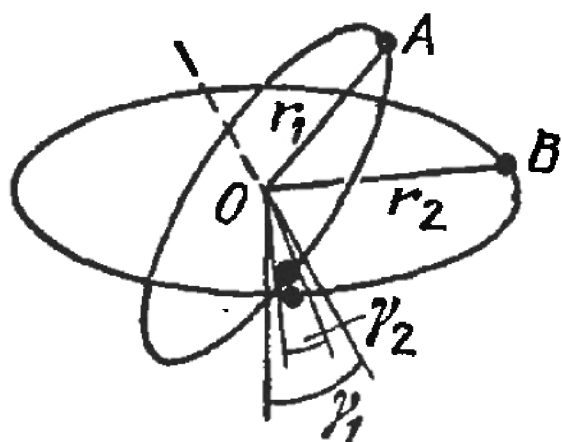


Рис. 8.11

**Задача 8.10.** Из некоторой точки сферической планеты одновременно отправились в бесконечное путешествие два путешественника, каждый по своему большому кругу и со своей постоянной скоростью. Доказать, что путешественники вновь встретятся, т. е. расстояние между ними в некоторый момент станет меньше 1 м.

**Задача 8.11.** Двое часов со стрелками идут равномерно, но одни из них немного отстают. а) Доказать, что в какой-то момент показания часов будут отличаться менее чем на 1 с. б)\* Решить ту же задачу для  $n$  равномерно идущих часов со стрелками: доказать, что найдется момент времени, когда показания любой пары часов будут отличаться менее чем на 1 с.

## § 9. Бильярд в прямоугольнике и тор

Напомним, что в § 7 для изучения траекторий бильярда в прямоугольнике  $Q=ABCD$  была предложена следующая конструкция.

Прежде всего с помощью отражений относительно сторон прямоугольника  $ABCD$ , а также относительно сторон уже отраженных прямоугольников замостим всю плоскость прямоугольниками  $Q_{m,n}$  равными  $ABCD=$

$=Q_{0,0}$ . Прямоугольник  $Q_{m,n}$  получается из прямоугольника  $ABCD$  с помощью  $m$  последовательных отражений относительно вертикальных сторон и  $n$  последовательных отражений относительно горизонтальных осей (рис. 9.1, а). Проведя на замощенной описанным образом плоскости прямую  $MN$ , мы можем с помощью обратных отражений ее куски, лежащие в прямоугольниках  $Q_{m,n}$ , перевести в исходный прямоугольник  $Q_{0,0}$ . Тем самым из прямой

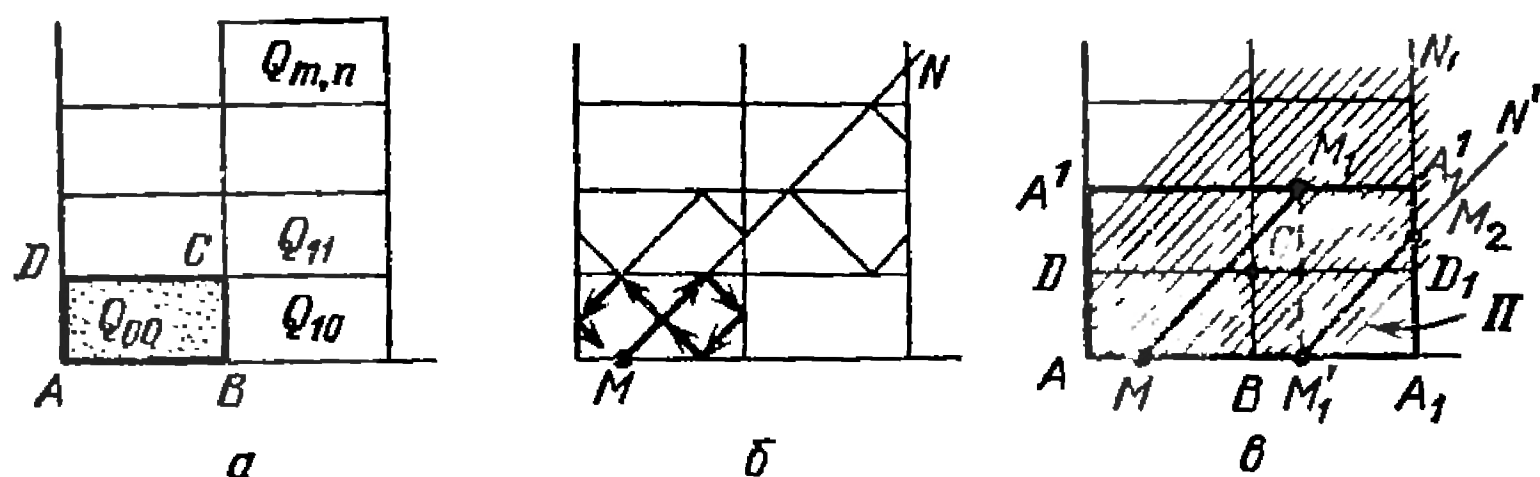


Рис. 9.1

$MN$  мы получим траекторию бильярда в прямоугольнике  $Q_{0,0}$  (рис. 9.1, б).

Удобно изучать не одну бильярдную траекторию отдельно, а целый *пучок* траекторий. Для этого на замощенной плоскости проведем *семейство параллельных друг другу прямых* с углом наклона  $\alpha$  к оси  $AB$ . Теперь заметим, что нет необходимости рассматривать этот пучок прямых на всей плоскости, а достаточно ограничиться четырьмя прямоугольниками —  $Q_{0,0}$ ,  $Q_{1,0}$ ,  $Q_{0,1}$  и  $Q_{1,1}$ , образующими один большой прямоугольник  $\Pi = AA_1A_1^1A^1$  (рис. 9.1, в). Допустим, траектория  $MN$  нашего пучка в точке  $M_1$  покидает прямоугольник  $\Pi$ . Двумя отражениями относительно прямых  $A^1A_1^1$  и  $DD_1$  мы *возвращаем* луч  $M_1N$  внутри прямоугольника  $\Pi$ . Композиция упомянутых отражений есть параллельный перенос на вектор  $\overrightarrow{A^1A}$ , и луч  $M_1N$  при этом переносе переходит в луч  $M_1'N'$ . В свою очередь, когда луч  $M_1'N'$  в точке  $M_2$  выходит опять из прямоугольника  $\Pi$ , мы с помощью параллельного переноса, задаваемого вектором  $\overrightarrow{A_1A}$ , переносим луч  $M_2N'$  внутрь  $\Pi$ , и так далее. Вместо того, чтобы рассматривать движение шара по прямой  $MN$ , мы можем (и, как мы сейчас увидим, это более удобно) считать, что доходя до границы прямоугольника  $\Pi$ , шар перескакивает в соответствующую точку противоположной стороны и движется в том же направлении до следующего перескакивания; таким образом, траектория шара состоит из последовательных

тельности параллельных отрезков на прямоугольнике  $\Pi$ . Чтобы получить из этой траектории траекторию бильярда, достаточно перегнуть прямоугольник  $\Pi$  по средним линиям (рис. 9.2). Прямоугольник  $\Pi$  назовем «фундаментальным прямоугольником» для исходного прямоугольного бильярда.

Конечно, более удобно рассматривать движение по непрерывным траекториям. Для этого достаточно склеить соответствующие точки противоположных сторон: склеить

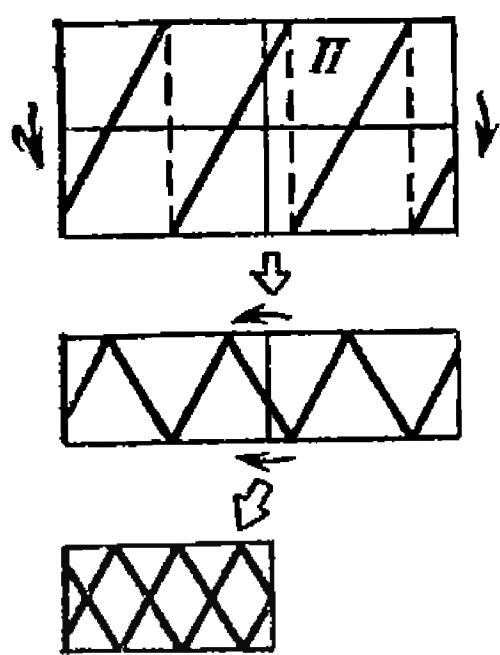


Рис. 9.2

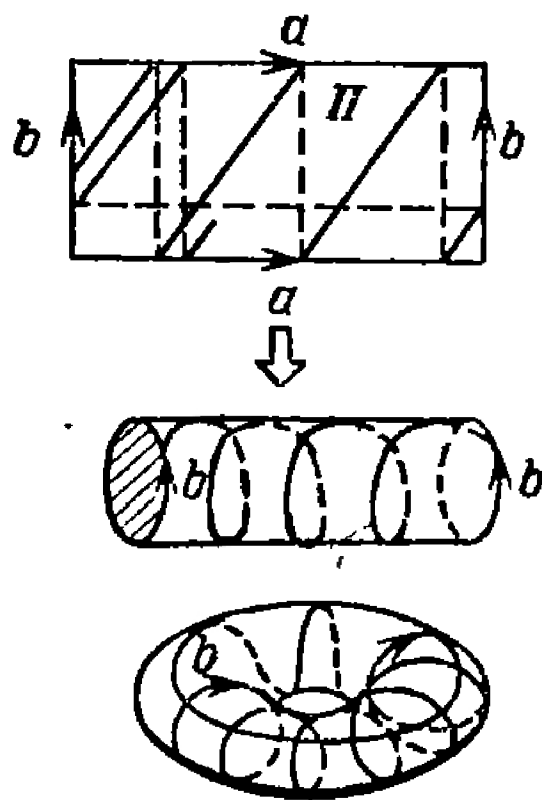


Рис. 9.3

верхнюю и нижнюю стороны  $a$  в прямоугольнике  $\Pi$ , получив цилиндр, а затем боковые стороны  $b$  (рис. 9.3). Ясно, что после склейки оснований цилиндра получится тор, а рассмотренные выше траектории станут непрерывными — это и будут *траектории обмотки тора*!

Найдем частоты этой обмотки. Если считать, что бильярдный шар движется со скоростью 1, то при движении под углом  $\alpha$  к стороне  $AB$  прямоугольника  $ABCD$  проекции скорости на горизонтальную и вертикальную оси равны  $v_1 = \cos \alpha$  и  $v_2 = \sin \alpha$ . В терминах координат на торе  $v_1$  и  $v_2$  — это скорости движения конфигурационной точки вдоль параллелей и вдоль меридианов. В нашем случае тор склеен из прямоугольника  $\Pi$  со сторонами  $2a_1$  и  $2a_2$  (здесь  $a_1 = AB$ ,  $a_2 = AD$  — стороны исходного прямоугольника  $ABCD$ ) и периоды движения по экватору и по меридиану равны  $T_1 = \frac{2a_1}{v_1} = \frac{2a_1}{\cos \alpha}$ ,  $T_2 = \frac{2a_2}{v_2} = \frac{2a_2}{\sin \alpha}$ .

Согласно определению, соответствующие частоты равны

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \pi \frac{\cos \alpha}{a_1}, \quad \omega_2 = \pi \frac{\sin \alpha}{a_2}.$$

Вспомнив результаты § 8, получаем:

(1) если число  $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a_1}{a_2} \operatorname{tg} \alpha$  рационально, то описанная обмотка тора рациональна, и все ее траектории периодичны;

(2) случаю иррациональности  $\omega = \frac{a_1}{a_2} \operatorname{tg} \alpha$  соответствует иррациональная обмотка тора, и тогда любая траектория обмотки всюду плотно заполняет тор.

Поскольку бильярдный поток на прямоугольнике  $Q = ABCD$  получается из обмотки тора (или, что то же самое, «потока с перескакиванием» на прямоугольнике  $\Pi$ ) складыванием тора вчетверо, соответствующим складыванию прямоугольника  $\Pi$  по средним линиям, мы получаем из рациональных обмоток тора пучки периодических бильярдных траекторий на прямоугольнике  $Q$ , а из иррациональных обмоток — пучки непериодических и всюду плотных на прямоугольнике  $Q$  траекторий бильярда. Тем самым теорема 2 из § 7 о всюду плотности бильярдных траекторий доказана.

Резюмируем сделанное в § 7 — 9.

Бильярд в прямоугольнике удается свести к обмоткам тора, при этом траектории бильярда оказываются либо периодическими, либо всюду плотными в прямоугольнике; периодичность (или всюду плотность) траектории определяется только начальным направлением движения, но не зависит от начального положения шара.

К изучению бильярдов в многоугольниках мы вернемся позже, в гл. 8 и 9, а сейчас в виде задач затронем несколько интересных вопросов, связанных с обмотками тора.

**Задача 9.1** (см. § 22). Доказать, что для бильярда в равнобедренном прямоугольном треугольнике любая неособая траектория либо периодична, либо всюду плотно заполняет треугольник. Показать, что особые траектории этого бильярда (т. е. те траектории, которые попадают в вершины) можно естественным образом продолжить за вершины (см. задачу 7.5) так, что они оказываются опять либо периодическими, либо всюду плотными.

**Задача 9.2** (см. § 22). Доказать утверждение задачи 9.1 для бильярда в равностороннем треугольнике. (Для этого попытайтесь обобщить рассмотрение этого параграфа на случай плоскости, замощенной равносторонними треугольниками — попробуйте ограничиться несколькими треугольниками, как выше мы ограничились четырьмя прямоугольниками; постройте затем «поток с перескакиванием».)

**Задача 9.3** (см. § 15 и гл. 7). При изучении бильярдов в многоугольниках (например в треугольниках) возникает следующий вопрос — не может ли бильярдная траектория «застрять»



в угле (не попасть точно в вершину угла, а «запутаться» около вершины — конечно, если так бывает, то эти траектории не могут быть всюду плотными)? Ответьте на этот вопрос. Сформулируем задачу более точно.

Дан угол  $A$  раднанной величины  $\alpha$ . Бильярдный шарик залетает внутрь этого угла. Сколько может произойти столкновений шара со сторонами угла, прежде чем шар вылетит из угла и полетит без столкновений? (Стороны угла — бесконечные лучи; рис. 9.4). Может ли быть бесконечно много столкновений? (Рассмотрите сначала случаи  $\alpha = \pi/2, \pi/4, \pi/3, 2\pi/5$ .) Докажите, что шар вылетит из угла в направлении, параллельном направлению влета, тогда и только тогда, когда  $\alpha = \pi/n$ , где  $n$  — натуральное число.

При доказательстве теоремы 2 из § 7 можно было воспользоваться следующей леммой.

**Задача 9.4 (лемма о зайцах).** В некотором узле  $O$  квадратной решетки находится охотник, а в остальных узлах сидят одинаковые и одинаково расположенные зайцы — кружки радиуса  $\varepsilon$  с центрами в этих узлах. Охотник наугад стреляет (траектория пули — луч  $l$ , выходящий из точки  $O$ ). Вернется ли он домой с добычей?

**Решение.** Если траектория пули проходит через узел, отличный от точки  $O$ , то заяц, сидящий в этом узле, будет убит «в самое сердце» (в центр кружка). Поэтому интересен только тот случай, когда узел  $O$  — единственный на траектории пули, т. е. тангенс угла наклона луча  $l$  к оси  $Ox$  иррационален. Оказывается, что и в этом случае какой-нибудь заяц будет убит. Обозначим точки пересечения луча  $l$  с вертикальными прямыми сетки через  $A_0=O, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$  (рис. 9.5). Совместим все квадраты решетки, которые пересекает луч  $l$ , с квадратом  $OMNK$ , тогда каждая точка  $A_n$  перейдет в некоторую точку  $A'_n$  на стороне  $MN$ . Найдутся такие точки  $A'_m$  и  $A'_{m+k}$ , расстояние между которыми будет меньше  $\varepsilon$  (почему?). Докажите самостоятельно, что тогда расстояние от точки  $A_k$  до одного из узлов решетки меньше  $\varepsilon$  (в частности, если  $A'_m$  и  $A'_{m+k}$  совпадают, то  $A_k$  будет узлом решетки).

Решение этой задачи почти воспроизводит доказательство теоремы Якоби, и то обстоятельство, что если из точек прямой, заполняющих ее всюду плотно, выпустить пучок параллельных прямых, то они заполняют всюду плотно всю плоскость.

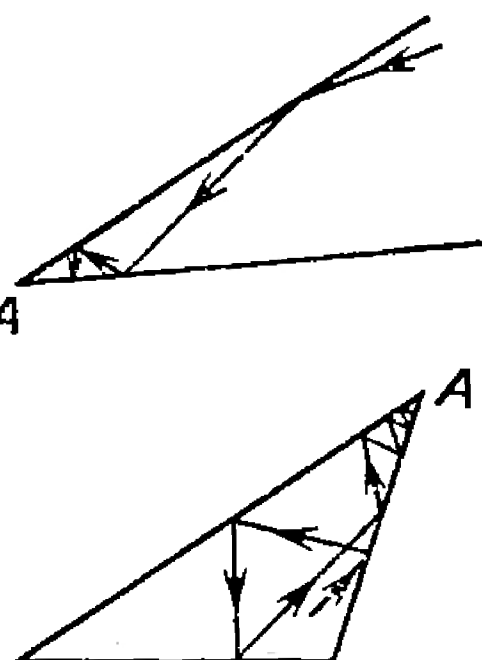


Рис. 9.4

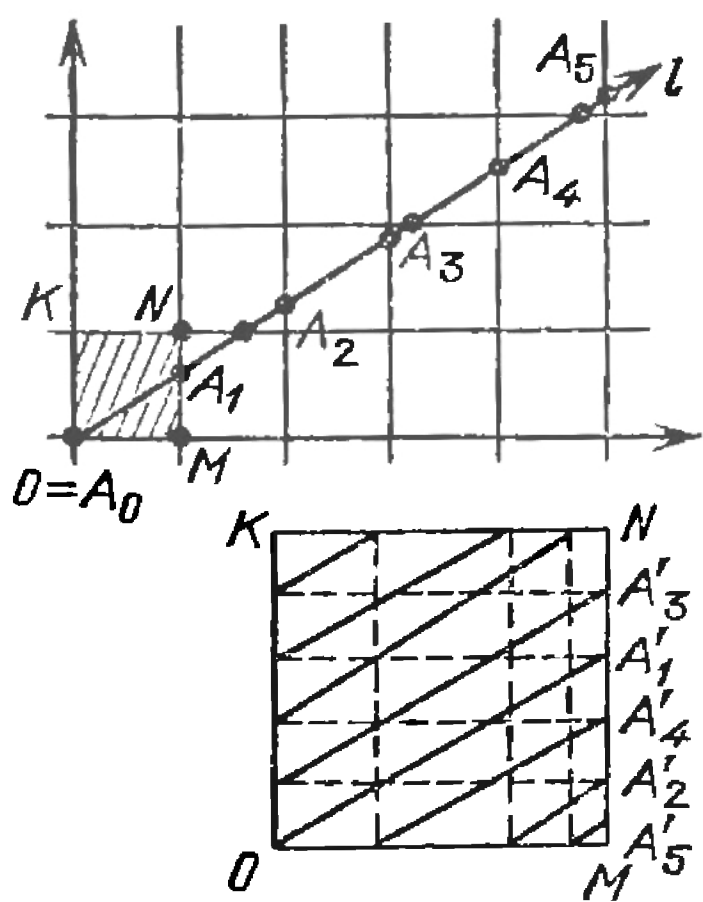


Рис. 9.5

## Глава 4

### ФИЗИКА ПРЯМОУГОЛЬНОГО БИЛЬЯРДА

Эта глава посвящена как фигурам Лиссажу, так и их изображениям на экране осциллографа, хорошо известным физикам-электронщикам. Мы приведем математическое определение этих понятий и свяжем их (с помощью осциллографа) с бильярдом в прямоугольнике и обмотками тора, а также решим с помощью обмоток тора одну геометрическую задачу об обнаружении неподвижного объекта на плоскости.

Основной материал этой главы мы будем «разбавлять» задачами, решения которых (иногда приводимые в тексте) используются для получения последующих результатов, поэтому желательно, чтобы читатель принял активное участие в решении этих задач.

#### § 10. Фигуры Лиссажу \*)

Фигурами Лиссажу называются кривые на плоскости  $Oxy$ , описываемые во времени  $t$  точкой с координатами  $x(t)$ ,  $y(t)$ , где

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\ y(t) &= a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),\end{aligned}\tag{1}$$

когда  $t$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Здесь  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  — постоянные, называемые *амплитудами* фигуры Лиссажу;  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_2 > 0$  — постоянные, называемые *частотами* фигуры Лиссажу;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — постоянные, называемые *начальными фазами*. Другими словами, *фигурой Лиссажу* называется *траектория точки, которая движется по*

---

\*) Лиссажу Жюль Антуан (1822—1880) — французский физик. Фигуры, названные его именем, он применил для оптического исследования сложения колебаний.

плоскости  $Oxy$  так, что ее координаты  $x$  и  $y$  совершают гармонические колебания, т. е. меняются по гармоническому закону (1). Фигуры Лиссажу можно наблюдать на экране осциллографа, подавая соответствующие напряжения на горизонтальную и вертикальную оси.

Поскольку при любом  $t$  выполнены неравенства

$$|x(t)| \leq a_1, \quad |y(t)| \leq a_2,$$

фигура Лиссажу целиком лежит в прямоугольнике  $Q$  размерами  $2a_1$  на  $2a_2$  с центром в начале координат. Далее, если  $\cos(\omega_1 t + \varphi_1) = \pm 1$ , то при этих значениях  $t$  фигура Лиссажу соприкасается с вертикальными сторонами прямоугольника  $Q$ , а при  $t$  таких, что  $\cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \pm 1$ , фигура Лиссажу касается горизонтальных сторон  $Q$ .

Заметим, что координата  $x(t)$  меняется периодически с периодом  $T_1 = 2\pi/\omega_1$  и координата  $y(t)$  — тоже периодически, но с другим периодом —  $T_2 = 2\pi/\omega_2$ . Движение точки  $(x(t), y(t))$  будет периодическим в том и только том случае, когда для некоторых целых  $m$  и  $n$   $mT_1 = nT_2$ , т. е. когда  $T_1$  и  $T_2$  соизмеримы (продумайте это).

Поскольку  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ , условие периодичности состоит в рациональности числа  $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ .

Сейчас мы укажем удобный способ изображения фигур Лиссажу, а заодно получим информацию о поведении непериодических фигур Лиссажу. Прежде всего, введем вместо  $t$  новую переменную

$$u = \omega_1 t + \varphi_1;$$

когда  $t$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ ,  $u$  тоже меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , и наоборот. Выразим  $t$  через  $u$ :

$$t = \frac{1}{\omega_1} u - \frac{1}{\omega_1} \varphi_1$$

и подставим полученное выражение в формулу для  $y(t)$ ; в результате возникнет следующая зависимость  $y$  от  $u$ :

$$y(u) = a_2 \cos(\omega u + \beta) = a_2 \cos \omega(u - \alpha),$$

где  $\omega = \omega_2/\omega_1$ ,  $\alpha = -\beta/\omega$ ,  $\beta = \varphi_2 - \omega\varphi_1$ . Наконец, выберем за единицу масштаба  $a_1$ , т. е. заменим  $a_1$  на 1,  $a_2$  на  $a = a_2/a_1$ . Теперь формулы, задающие фигуру Лиссажу, принимают совсем простой вид:

$$x(u) = \cos u, \quad y(u) = a \cos(\omega(u - \alpha)).$$

На рис. 10.1 нарисованы вырожденные фигуры Лиссажу с фазой  $\alpha=0$ ,  $\omega=1$  (рис. 10.1, а) и  $\omega=2$  (рис. 10.1, б): при  $\omega=1$  и  $\alpha=0$   $y=a \cos u=ax$  и мы получаем дважды проходимый отрезок прямой; если  $\omega=2$  и  $\alpha=0$ , то  $y=a \cos 2u=a(2\cos^2 u-1)=2ax^2-a$  и соответствующая фигура Лиссажу — дважды проходимая дуга параболы.

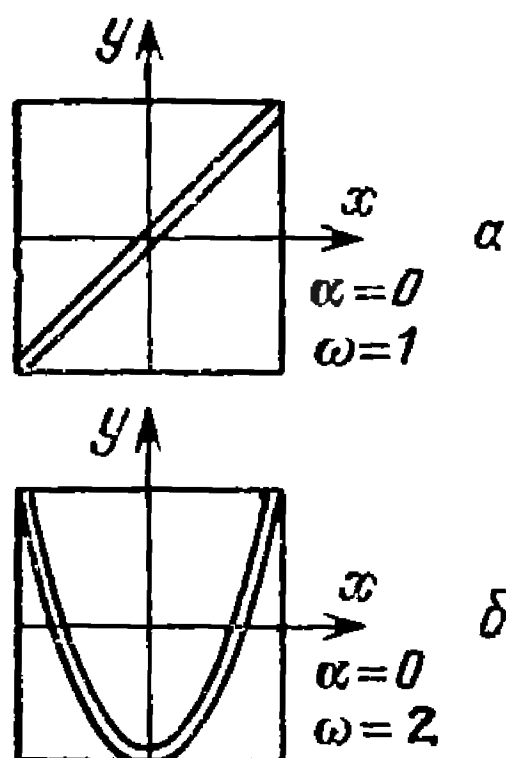


Рис. 10.1

**Задача 10.1.** Докажите, что при  $\alpha=0$  и  $\omega=n$  ( $n$  — натуральное число) фигура Лиссажу представляет собою часть графика многочлена степени  $n$ :  $y=T_n(x)$ . (Многочлены, получающиеся таким образом, называются *многочленами Чебышева* \*).)

В общем случае (при  $\alpha \neq 0$ )  $y$  нельзя разумным образом выразить через  $x$ , и мы поступим иначе. Чтобы нарисовать на плоскости  $Oxy$  заданную уравнениями (2) фигуру Лиссажу, которую мы обозначим  $L(\omega, \alpha)$ , нарисуем сначала на вспомогательной плоскости  $Ouu$  график функции

$$y=a \cos \omega u,$$

который обозначим  $\Gamma_\omega$ . Чтобы получить график  $\Gamma_{\omega, \alpha}$  функции  $y=a \cos \omega(u-\alpha)$ , достаточно перенести график  $\Gamma_\omega$  на  $\alpha$  вдоль оси  $Ou$  (рис. 10.2).

Рассмотрим бесконечный прямой круговой цилиндр радиуса 1, на котором выделена одна образующая — ось  $Oy$  — и одна направляющая — окружность  $S$ . Приложим плоскость  $Ouu$  к цилиндру, совместив ось  $Oy$  на плоскости и на цилиндре так, чтобы ось  $Ou$  касалась окружности  $S$ . Теперь намотаем всю плоскость  $Ouu$  на цилиндр (рис. 10.3). Конечно, процедура намотки лишь воображаемая; плоскость считается «бесконечно тонкой», прозрачной — на ней лишь отмечена кривая  $\Gamma_{\omega, \alpha}$  (указанная намотка аналогична намотке прямой  $\mathbb{R}^1$  на окружность при решении числовой задачи в § 2). Эта кривая, намотанная на цилиндр, дает пространст-

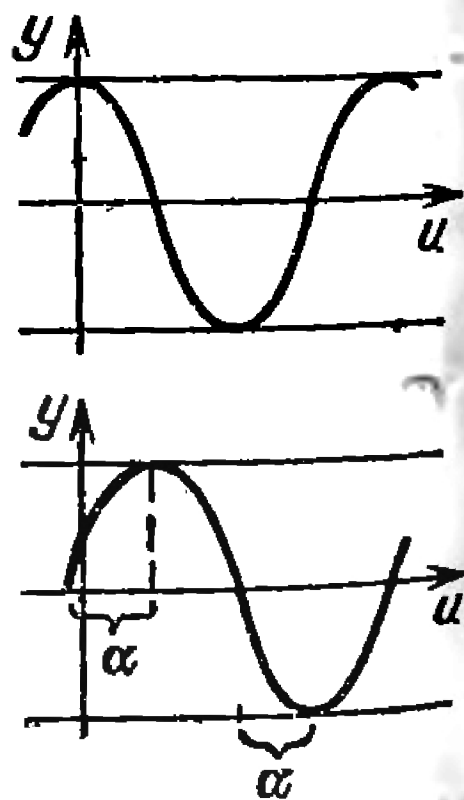


Рис. 10.2

\*) П. Л. Чебышев (1821—1894) — крупнейший русский математик, основоположник петербургской математической школы. Многочлены, названные его именем, являются многочленами, «наш-

венную кривую, которую обозначим  $\Gamma(\omega, \alpha)$ . Заметим, что переносу на  $\alpha$  по оси  $Ou$ , при котором из графика  $\Gamma_\omega$  получается график  $\Gamma_{\omega, \alpha}$ , соответствует (после намотки плоскости на цилиндр) поворот около оси цилиндра  $O_1y_1$  на угол  $\alpha$  радиан. Отсюда следует, что для получения кривой  $\Gamma(\omega, \alpha)$  можно поступить так: намотать на цилиндр график  $\Gamma_\omega$  функции  $y = a \cos(\omega u)$  и полученную кривую  $\Gamma(\omega)$  повернуть на угол  $\alpha$  около оси  $O_1y_1$  (рис. 10.4).

Итак, мы получили пространственную кривую  $\Gamma(\omega, \alpha)$ , лежащую на цилиндре. Вообще говоря, эта кривая будет иметь точки самопересечения.

Она целиком лежит в куске цилиндра  $|y| \leq a$  около окружности  $S$  на цилиндре (это «кольцо» получается после намотки на цилиндр полосы  $|y| \leq a$  плоскости  $Ouy$ ); точкам касания графика  $\Gamma_{\omega, \alpha}$

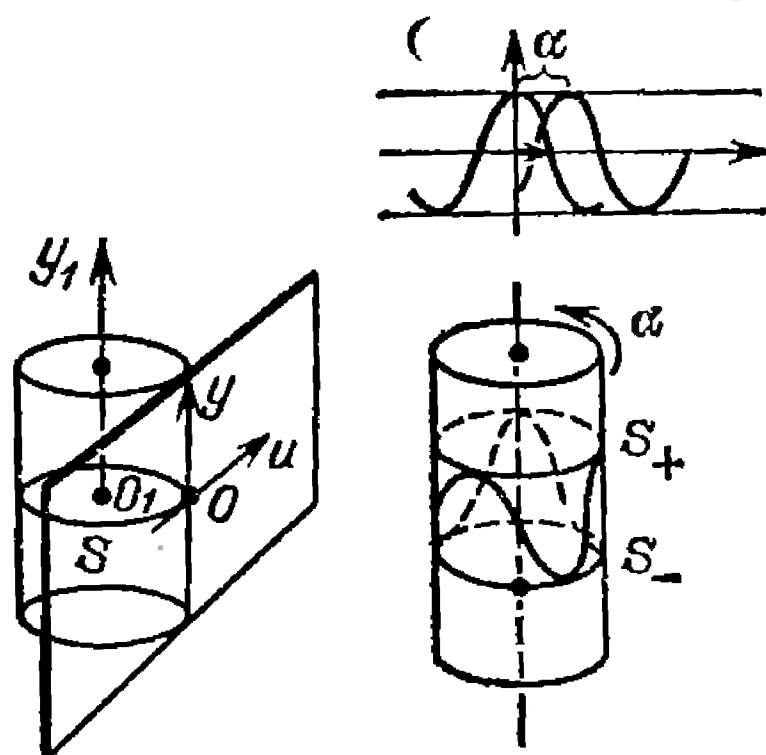


Рис. 10.3

Рис. 10.4

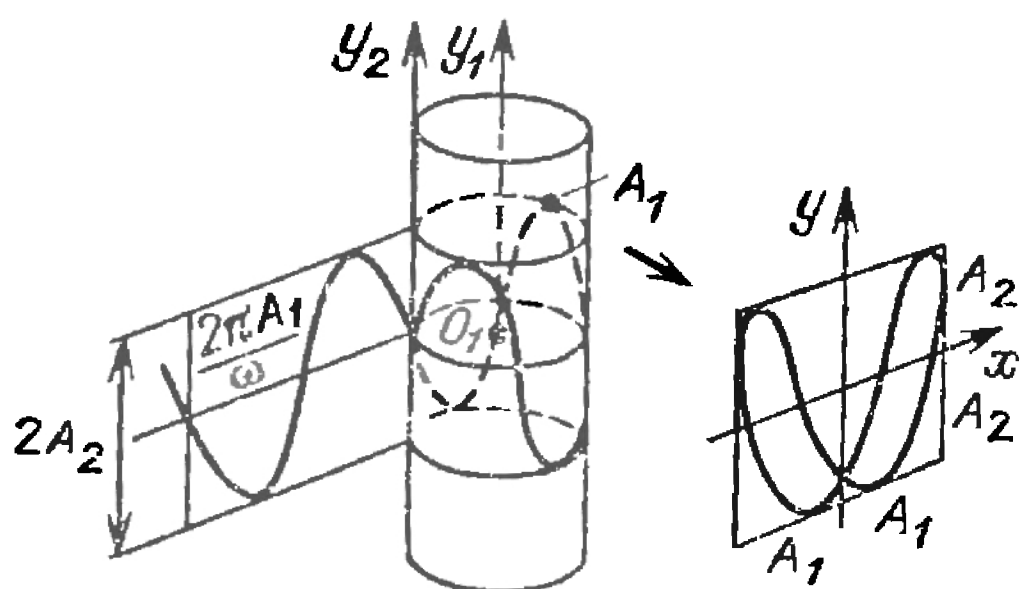


Рис. 10.5

с прямыми  $y = \pm a$  соответствуют точки касания кривой  $\Gamma(\omega, \alpha)$  с верхней и нижней окружностями  $S_{(+)}$  и  $S_{(-)}$ , ограничивающими упомянутый кусок цилиндра (рис. 10.4).

Наконец, приложим к цилиндру с изображенной на нем кривой  $\Gamma(\omega, \alpha)$  плоскость  $Oxy$  так, чтобы своей осью  $Oy$  она касалась цилиндра по образующей  $O_2y_2$ , получающейся из образующей цилиндра  $Oy$  поворотом на  $\pi/2$  около оси  $O_1y_1$ . После этого спроектируем кривую  $\Gamma(\omega, \alpha)$  с цилиндра

менее уклоняющимися от нуля» (см. научно-популярную книгу: Данилов Ю. А. Многочлены Чебышева. — Минск: Высшая школа, 1984).

на плоскость  $Oxy$  — так сказать, посмотрим на кривую  $\Gamma(\omega, \alpha)$  сбоку — так, чтобы ось цилиндра  $O_1y_1$  слилась с образующей  $O_2y_2$  цилиндра и осью  $Oy$  на плоскости, а образующая цилиндра  $Oy$  спроектировалась в прямую  $x=1$  (рис. 10.5).

**Задача 10.2.** Доказать, что проекция кривой  $\Gamma(\omega, \alpha)$  на плоскость  $Oxy$  есть фигура Лиссажу  $L(\omega, \alpha)$ .

**Решение.** Точка  $(u, a \cos \omega(u-\alpha))$  графика  $\Gamma_{\omega, \alpha}$  после намотки плоскости  $Oxy$  на цилиндр перейдет в точку цилиндра  $U$ ,

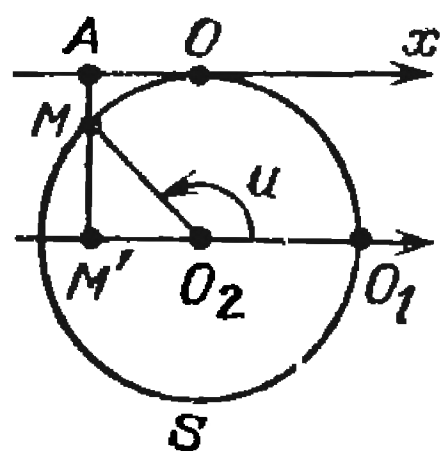


Рис. 10.6

высота которой над окружностью  $S$  по направляющей цилиндра равна  $h = a \cos \omega(u-\alpha)$ , и при проекции на плоскость  $Oxy$  точка  $U$  перейдет в точку  $U'$  с ординатой  $y = h = a \cos \omega(u-\alpha)$ . Чтобы найти абсциссу точки  $U'$ , рассмотрим точку  $M$ , в которой проходящая через  $U$  направляющая цилиндра пересекает окружность  $S$  (рис. 10.6). Угол  $\angle O_1O_2M$ , согласно определению намотки, равен  $u$ , и координата по оси  $Ox$  проекции  $M$  на  $Ox$  равна  $O_2M' = \cos u$ . Таким образом, проекция точки  $U$  на плоскость  $Oxy$  имеет координаты  $(x, y) = (\cos u, a \cos \omega(u-\alpha))$ , что и требовалось доказать.

Итак, для построения фигур Лиссажу  $L(\omega, \alpha)$  достаточно намотать к о с и н у с о и д у  $y = a \cos \omega u$  на цилиндр и затем спроектировать ее на соответствующую плоскость (повернув перед этим на угол  $\alpha$  кривую или плоскость  $Oxy$ !). Таким образом, чтобы нарисовать семейство фигур Лиссажу  $L(\omega, \alpha)$  с фиксированным  $\omega$  и разными  $\alpha$ , достаточно построить всего лишь одну кривую — цилиндрическую косинусоиду  $\Gamma(\omega)$ . Рассмотрим несколько частных случаев.

**Случай  $\omega=1$ .** При намотке косинусоиды  $y = a \cos u$  на единичный цилиндр один период  $(0 \leq u < 2\pi)$  косинусоиды наложится на цилиндр ровно один раз, и  $\Gamma(1)$  будет замкнутой кривой с одним минимумом и одним максимумом (самой высокой и самой низкой точкой, если высоту измерять по образующим цилиндра).

**Задача 10.3.** Доказать, что кривая  $\Gamma(1)$  — плоская, г. е. целиком лежит в одной плоскости. (Эта кривая есть сечение цилиндра плоскостью.)

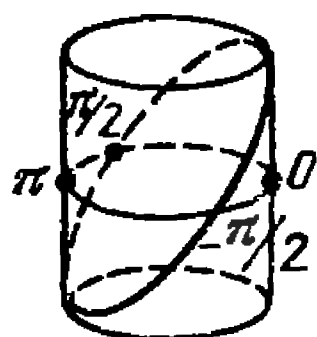
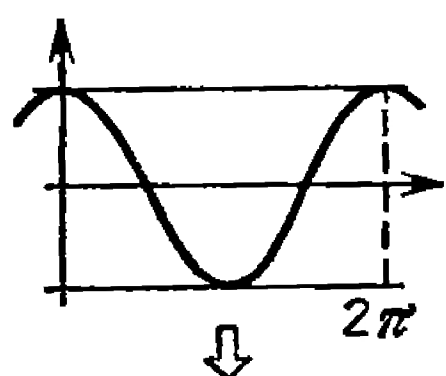
**Задача 10.4.** Доказать, что сечение цилиндра плоскостью, наклонной к его оси, есть эллипс (определение эллипса см. в § 4). (Решение этой задачи с помощью сфер Данделея приведено в § 4 — см. задачу 4.4.)

«Рассматривая» полученную кривую с разных сторон, нетрудно изобразить семейство фигур Лиссажу с  $\omega=1$  (т. е. с  $\omega_1=\omega_2$ ). Поскольку перпендикулярная проекция эллипса есть либо круг, либо опять эллипс, фигуры Лис-



сажу с  $\omega=1$  суть эллипсы, вписанные в прямоугольник  $\Pi$  (рис. 10.7).

С л у ч а й  $\omega=2$ . Два периода косинусоиды  $y=a \cos 2u$  дадут при намотке на единичный цилиндр только о д и н



$\Downarrow \omega=1$

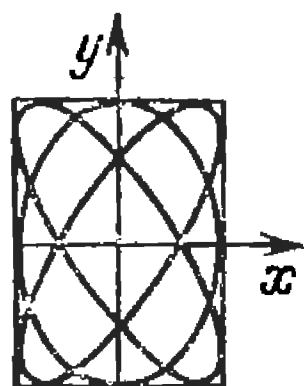
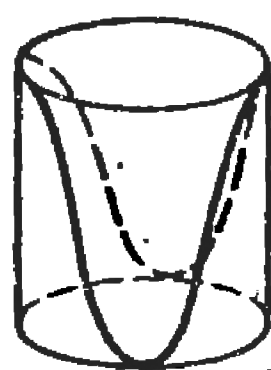
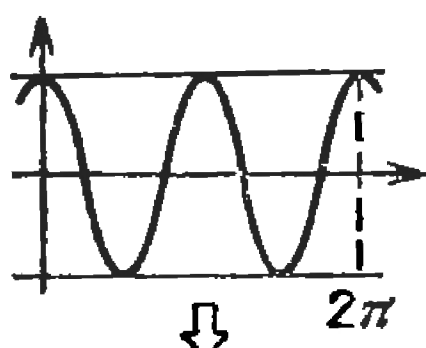


Рис. 10.7



$\Downarrow \omega=2$

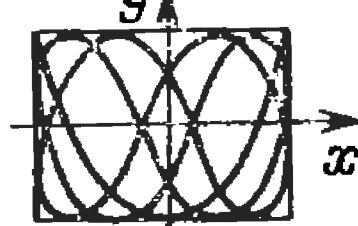
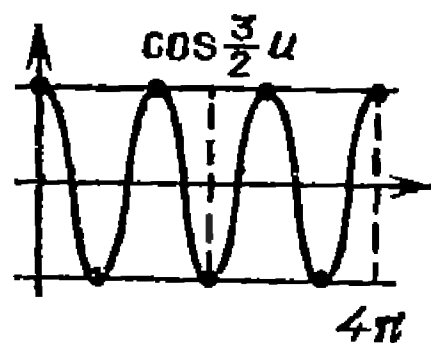


Рис. 10.8

слой на цилиндре, и кривая  $\Gamma(2)$  имеет 2 минимума и 2 максимума. Полученная кривая уже не плоская (она похожа на проволочное седло). Ее «рассмотрение» дает семейство фигур Лиссажу с  $\omega=2$  (рис. 10.8).

С л у ч а й  $\omega=3/2$ . Кривая  $\Gamma(3/2)$  на цилиндре замкнется, когда мы намотаем на него д в а слоя — три периода косинусоиды  $y=a \cos \frac{3}{2}u$ . Эта кривая будет иметь самопересечение уже на цилиндре. Изобразите какую-нибудь из соответствующих фигур Лиссажу (рис. 10.9).



$\Downarrow \omega=3/2$

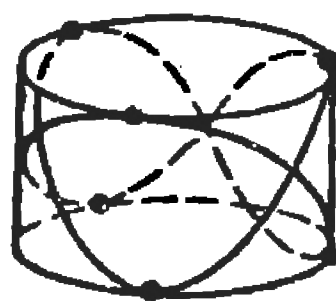


Рис. 10.9

При рассмотрении фигур Лиссажу с  $\omega=1$  и  $\omega=2$  бросается в глаза их сходство с семействами периодических траекторий бильярда в прямоугольнике (см. рис. 7.1), только у траекторий бильярда вместо точек касания со сторонами прямоугольника — точки излома.

Это сходство отнюдь не случайно, и мы его обсудим в следующем параграфе (подумайте над этим вопросом самостоятельно).

Займемся теперь непериодическими фигурами Лиссажу.

**Т е о р е м а.** *Любая непериодическая фигура Лиссажу всюду плотно заполняет прямоугольник  $\Pi = \{ |x| \leq 1, |y| \leq a \}$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку фигура Лиссажу  $L(\omega, \alpha)$  получается в результате проекции цилиндрической косинусоиды  $\Gamma(\omega, \alpha)$  на плоскость  $Oxy$ , причем проекция части цилиндра  $C = \{ |y| \leq a \}$ , лежащего между окружностями  $S_{(+)}$  и  $S_{(-)}$  (см. выше) есть в точности прямоугольник  $\Pi$ , достаточно доказать, что при иррациональном  $\omega$  кривая  $\Gamma(\omega, \alpha)$  всюду плотно заполняет цилиндр  $C$ . Для этого рассмотрим точки касания кривой  $\Gamma(\omega, \alpha)$  с верхней окружностью  $S_{(+)}$ . Они получаются при намотке на окружность  $S_{(+)}$  из точек касания графика  $y = a \cos \omega(u - \alpha)$  с прямой  $y = a$ , т. е. из таких точек  $u_n$ , что  $\omega(u_n - \alpha) = 2\pi n$ . Отсюда находим:

$$u_n = \alpha + n \frac{2\pi}{\omega}.$$

После намотки эти точки дадут последовательность точек  $M_n$  на окружности  $S_{(+)}$ , причем, поскольку  $u_n$  — арифметическая прогрессия с разностью  $\varphi = 2\pi/\omega$ , точки  $M_n$  получаются каждая из предыдущей поворотом по окружности  $S_{(+)}$  на угол  $\varphi$ . Согласно теореме Якоби (§ 2), если числа  $\varphi$  и  $\pi$  несоизмеримы, точки  $M_n$  всюду плотно заполняют окружность  $S_{(+)}$ . Несоизмеримость  $\varphi$  с  $\pi$  означает иррациональность отношения  $\varphi/\pi = 2/\omega$ , т. е. иррациональность  $\omega$ . Из всюду плотности множества точек  $M_n$  по окружности  $S_{(+)}$  уже несложно вывести всюду плотность кривой  $\Gamma(\omega, \alpha)$  на цилиндре (проведите подробный вывод сами). Теорема доказана.

Эта теорема тоже весьма напоминает соответствующие свойства бильярдных траекторий. Из нее следует, что самый лучший способ нарисовать фигуру Лиссажу с иррациональным  $\omega$  — зарисовать сплошь весь прямоугольник  $\Pi$ ! Если наблюдать такую фигуру Лиссажу на экране осциллографа, то можно заметить, что она плывет — за экраном как бы поворачивается невидимый цилиндр с нарисованной на нем цилиндрической косинусоидой. На самом деле это не плывущая, а одна и та же фигура Лиссажу (если только не меняются фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ ), но ранее начерченная ее часть потухла на экране. Если

бы не было такого затухания, то мы увидели бы всюду плотную на экране фигуру Лиссажу, если только отношение  $\omega = \omega_2/\omega_1$  «подобрать иррациональным». («Всюду плотность» на экране соответствовала бы тому, что весь экран светился бы; более того, экран светился бы все равномернее и равномернее,— но это довольно сложное утверждение.) Заметим, что «иррациональных чисел больше, чем рациональных»: рациональные числа можно занумеровать, а иррациональные нельзя. В теории вероятностей часто используется следующий факт: «если наугад ткнуть пальцем (точечным!) в какую-либо точку на числовой прямой, то с вероятностью 1 мы попадем в точку с иррациональной координатой». Поэтому подобрать  $\omega$  иррациональным можно, выбрав его «наугад».

Задачи физики, в которых появляются фигуры Лиссажу, довольно подробно рассмотрены в ряде статей из «Кванта»: Минц Н. А. Странный маятник (1971. № 6. С. 30—32); Коткин Г. Л. Опыты с маятниками (1972. № 1. С. 26—31); Сипаева Н. А. Фигуры Лиссажу (1972. № 7. С. 23—28). Там же описаны соответствующие опыты.

**Задача 10.5.** Придумать способ рисования кривых на плоскости  $Oxy$ , задаваемых уравнениями: а)  $x = \sin t$ ,  $y = f(t)$ ; б)  $x = f(t)$ ,  $y = \cos t$ . (Здесь  $f(t)$  — заданная функция; мы имеем в виду способ, аналогичный описанному способу построения фигур Лиссажу.)

**Задача 10.6.** Докажите, что фигуры Лиссажу  $L(1/\omega, \alpha)$  с амплитудами  $a_1 = a_2 = 1$  равны соответствующим фигурам Лиссажу  $L(\omega, \beta)$  с тем же  $\omega$  и каким-то  $\beta$ . (Рассмотрите сначала случаи  $\omega = 2 \left( \frac{1}{\omega} = \frac{1}{2} \right)$ ;  $\omega = n \left( \frac{1}{\omega} = \frac{1}{n} \right)$ , где  $n$  — натуральное.)

**Задача 10.7.** Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь фигура Лиссажу, если а)  $\omega = n$ , б)  $\omega = 1/n$ , в)  $\omega = m/n$  ( $m$  и  $n$  — натуральные)?

## § 11. Бильярд в прямоугольнике и осциллограф

В § 9 было показано, что траектории бильярда в прямоугольнике получаются из траекторий обмоток тора  $\mathbb{T}$  «складыванием тора вчетверо». Рисунок 11.1 напоминает, в чем состоит это складывание. С точки зрения математики с помощью этого складывания мы каждой точке  $M$  тора  $\mathbb{T}$  ставим в соответствие некоторую вполне определенную точку  $M'$  прямоугольника  $Q$ . Такое соответствие, как хорошо известно (см., например, раздел II книги А. Н. Колмогорова «Математика — наука и профессия», «Библиотечка «Квант», 1988. Вып. 64), называется *отображением тора  $\mathbb{T}$  на прямоугольник  $Q$* . Обозначим

его  $f_6$ :

$$f_6: \mathbb{T} \rightarrow Q, \quad f_6(M) = M'.$$

Для точки  $N$  внутри  $Q$  имеется ровно 4 прообраза — точки  $M_1, M_2, M_3, M_4$  тора, для которых  $f_6(M_k) = N$  (рис. 11.2). Если на торе рассмотреть кривую  $\Gamma$ , являющуюся *траекторией обмотки тора* (см. § 8), то образ этой кривой при

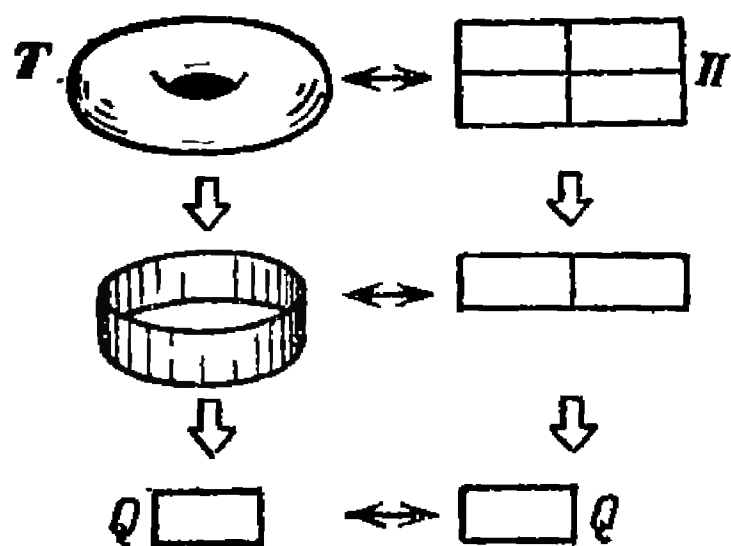


Рис. 11.1

отображении  $f_6$  — кривая  $f_6(\Gamma)$  в прямоугольнике, являющаяся *траекторией бильярда*.

В § 10 мы обратили внимание на сходство между траекториями бильярда и фигурами Лиссажу (рис. 11.3). Оказывается, причины этого сходства состоят в том, что *фигуры Лиссажу также являются образами траекторий обмоток тора при некотором отображении  $f_0$  тора*

$\mathbb{T}$  в прямоугольник  $\Pi$ , в который вписаны фигуры Лиссажу —  $\Pi = \{(x, y): |x| \leq a_1, |y| \leq a_2\}$ , если фигуры Лиссажу задаются формулами

$$x(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad y(t) = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Отображение  $f_0: \mathbb{T} \rightarrow \Pi$  мы сейчас опишем. Оно оказывается весьма похожим на отображение  $f_6$ ; если отобра-

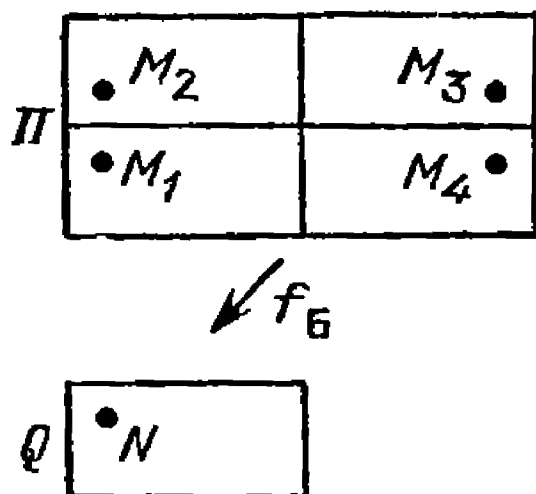


Рис. 11.2

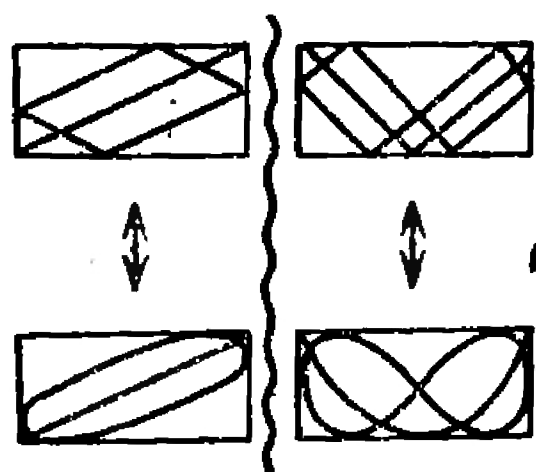


Рис. 11.3

жение  $f_6$  назвать «*бильярдом*», то отображение  $f_0$  естественно назвать «*свободным осциллографом*» (осциллографом, показывающим фигуры Лиссажу).

Итак, в целом ситуация такова. Имеются два «почти одинаковых» отображения  $f_6$  и  $f_0$  тора  $\mathbb{T}$  в прямоугольник. При этом траектория  $\Gamma$  обмотки тора при отображении «бильярд» переходит в траекторию бильярда  $f_6(\Gamma)$ , при отображении «осциллограф» переходит в фигуру Лиссажу

$f_0(\Gamma)$ . В этом смысле «бильярд» и «осциллограф» устроены одинаково, или, как часто говорят в таких случаях, и з о м о р ф н ы.

Опишем теперь отображение «свободный осциллограф»  $f_0$ . Рассмотрим тор  $\mathbb{T}$  с координатами  $(\psi_1, \psi_2)$  на нем (долготой и широтой — см. § 8). Точке тора  $M$  с координатами  $(\psi_1, \psi_2)$  поставим в соответствие точку  $M'$  плоскости  $Oxy$  с координатами  $x = a_1 \cos \psi_1$ ,  $y = a_2 \cos \psi_2$  и положим  $M' = f_0(M)$ . Тем самым отображение  $f_0$  полностью определено — оно задается формулой

$$f_0(\psi_1, \psi_2) = (a_1 \cos \psi_1, a_2 \cos \psi_2).$$

Траектория  $\Gamma$  обмотки тора с частотами  $(\omega_1, \omega_2)$  задается формулами

$$\psi_1(t) = \omega_1 t + \varphi_1, \quad \psi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_2.$$

Образ траектории  $\Gamma$  этой обмотки при отображении  $f_0$  на плоскости есть кривая

$$\begin{aligned} f_0(\Gamma) &= \{f_0(\psi_1(t), \psi_2(t)) : -\infty < t < +\infty\} = \\ &= \{(a_1 \cos \psi_1(t), a_2 \cos \psi_2(t)) : -\infty < t < +\infty\}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения для  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$ , получим, как и ожидалось, формулы фигуры Лиссажу:

$$f_0(\Gamma) = \{(a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)) : -\infty < t < +\infty\}.$$

Таким образом, действительно, фигуры Лиссажу являются образами траекторий обмоток тора при отображении  $f_0$ .

Посмотрим теперь, как «устроено» это отображение. Разобьем тор на четыре квадрата, как указано на рис.

11.4. Пусть  $M = (\psi_1, \psi_2)$  — точка внутри квадрата  $Q_{00}$ , т. е.  $0 < \psi_1 < \pi$ ,  $0 < \psi_2 < \pi$ ; рассмотрим еще три точки  $M_{10} = (2\pi - \psi_1, \psi_2)$ ,  $M_{01} = (\psi_1, 2\pi - \psi_2)$ ,  $M_{11} = (2\pi - \psi_1, 2\pi - \psi_2)$ . Нетрудно видеть, что эти точки получаются из  $M$

симметриями относительно средних линий квадрата; с другой стороны, согласно известным формулам тригонометрии

$$f_0(M_{10}) = f_0(M_{01}) = f_0(M_{11}) = f_0(M)$$

(проверьте!), т. е. эти четыре точки при отображении  $f_0$  переходят в одну — точно так же, как и при соответствующем отображении  $f_0$ . Наконец, поскольку функция  $z = \cos \psi$  осуществляет взаимно однозначное отображение

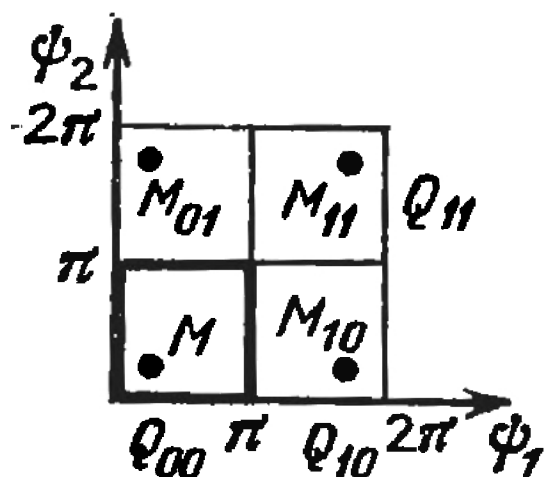


Рис. 11.4

отрезка  $0 \leq \psi \leq \pi$  на отрезок  $-1 \leq z \leq 1$ , отображение  $(x, y) = (a_1 \cos \psi_1, a_2 \cos \psi_2)$  отображает взаимно однозначно квадрат  $Q_{00}$  на прямоугольник  $\Pi = \{-a_1 \leq x \leq a_1, -a_2 \leq y \leq a_2\}$  (проверьте!).

Итак, отображение «осциллограф»  $f_0$  действует так: сначала тор  $\mathbb{T}$  «складывается», как и при отображении «бильярд»  $f_6$ , вчетверо — соответствующий квадрат перегибается по средним линиям и превращается в свою четверть  $Q_{00}$ . При этом траектории обмотки превращаются в траектории бильярда в квадрате  $Q_{00}$ . После этого к квадрату  $Q$  применяется взаимно однозначное отображение  $f_*$  его на прямоугольник  $\Pi$ , при котором траектории бильярда «сглаживаются» и превращаются в фигуры Лиссажу! (Последнее отображение при  $a_1 = a_2 = 1$  есть сжатие, но не равномерное; благодаря неравномерности и сглаживаются углы.) Приведенное описание показывает, что «бильярд» и «осциллограф» действительно «изоморфны» — «отличаются на взаимно однозначное преобразование». Изоморфизм между фигурами Лиссажу и траекториями бильярда можно пояснить довольно просто и по-другому. При движении точки  $(x(t), y(t))$ , описываемом уравнениями фигуры Лиссажу

$$x(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad y(t) = a_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

координаты  $x$  и  $y$  (или проекции точки  $(x, y)$  на оси  $Ox$  и  $Oy$ ) совершают гармонические колебания. При движении же бильярдного шара  $(x, y)$  по прямоугольнику  $\{0 \leq x \leq a_1, 0 \leq y \leq a_2\}$  координаты  $x$  и  $y$  также совершают колебания, только не гармонические, а соответствующие закону упругого отражения. Можно написать формулы, по которым меняются  $x$  и  $y$  в этом случае:

$$x(t) = a_1 \left| 2 \left\{ \frac{v_1}{2a_1} t + b_1 \right\} - 1 \right|, \quad y(t) = a_2 \left| 2 \left\{ \frac{v_2}{2a_2} t + b_2 \right\} - 1 \right|.$$

Здесь  $\{u\}$  — обозначение для дробной части числа  $u$ . График зависимости  $x$  от  $t$ , задаваемой выписанной формулой,

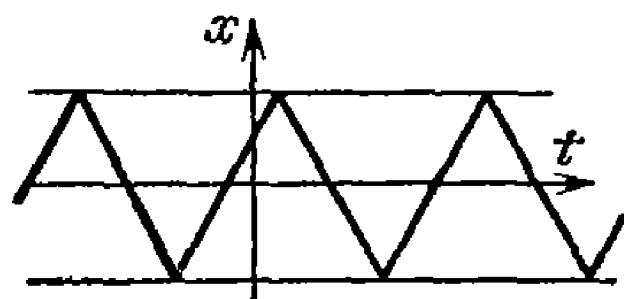


Рис. 11.5

схематически изображен на рис. 11.5. Таким образом, траектории бильярда задаются формулами, аналогичными формулам для фигур Лиссажу — с той разницей, что вместо функции  $\cos u$  в этих формулах фигурирует функция

$$c(u) = |2\{u\} - 1|.$$

**Задача 11.1.** Полученное описание фигур Лиссажу как образов траекторий обмотки тора при указанном отображении



дает возможность сразу доказать всюду плотность фигур Лиссажу с иррациональным отношением  $\omega_2/\omega_1$ . Проведите точное рассуждение.

**Задача 11.2.** Отображение  $f_0$  есть композиция проекций тора — убедитесь в этом, показав, что при описанном ниже построении (по шагам) получаются фигуры Лиссажу.

**1 шаг.** На плоскости  $O\psi_1\psi_2$  рисуем прямую и наматываем эту плоскость на *горизонтальный* цилиндр радиуса 1.

**2 шаг.** Проектируем полученную на цилиндре кривую на плоскость  $O\psi_1y$ .

**3 шаг.** Наматываем плоскость  $O\psi_1y$  на *вертикальный* цилиндр радиуса 1.

**4 шаг.** Проектируем полученную на цилиндре кривую на плоскость  $Oxy$  — должны получиться фигуры Лиссажу с амплитудами  $a_1=a_2=1$ .

## § 12. Задача о пеленге

Пусть на плоскости даны две различные точки  $A_1$  и  $A_2$ . Около этих точек вращаются прямые  $l_1$  и  $l_2$  с постоянными угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Пусть  $M(t)$  — точка пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2$  в момент времени  $t$ . *Задача о пеленге* заключается в описании «кривой пеленга» — траектории движения точки  $M(t)$  (рис. 12.1). В некоторые моменты времени прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны — тогда мы считаем (как и происходит на самом деле), что точка  $M$  «отлучилась на бесконечность».

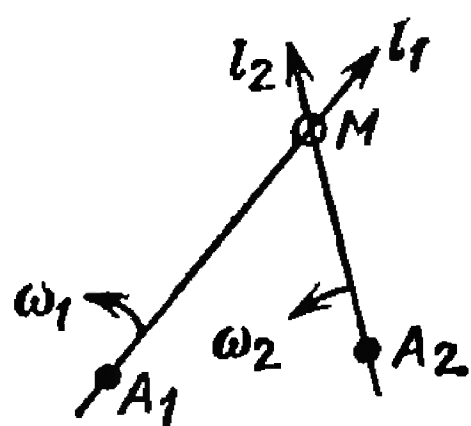


Рис. 12.1

Если периоды вращения  $T_1=2\pi/|\omega_1|$  и  $T_2=2\pi/|\omega_2|$  *соизмеримы*, то, очевидно, движение точки  $M(t)$  будет *периодическим* — повторяющимся через некоторый промежуток времени. Однако нарисовать соответствующие кривые не так уж просто, и мы, в качестве разминки, ограничимся рассмотрением случая  $\omega_1=\omega_2$ .

Если  $\omega_1=\omega_2=\omega$ , т. е. движение прямых  $l_1$  и  $l_2$  происходит с одинаковыми угловыми скоростями и в одном направлении, то из рис. 12.2 видно, что углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  равны (оба эти угла равны  $\omega \cdot \Delta t$ ) и поэтому углы  $\angle A_1MA_2$  и  $\angle A_1M'A_2$  равны. Следовательно, в этом случае точка  $M(t)$  движется по дуге окружности, проходящей через точки  $A_1$  и  $A_2$  \*). Какая именно это дуга, зависит от начальных положений прямых  $l_1$  и  $l_2$  (если в начальный момент  $l_1$  и  $l_2$  параллельны, то они будут такими и всегда).

\*) Как известно, множество точек  $M$ , лежащих по одну сторону от прямой  $A_1A_2$  и таких, что  $\angle A_1MA_2=\alpha=\text{const}$ , представляет собой дугу окружности с хордой  $A_1A_2$ .

Нетрудно показать, что после перехода прямой  $l_2$  через положение  $A_2A_1$  точка  $M$  продолжает двигаться по дуге той же окружности, что и раньше. Таким образом, «пеленг» с частотами  $\omega_1 = \omega_2$  происходит по окружностям, проходящим через точки  $A_1$  и  $A_2$ .

В случае  $\omega_1 = -\omega_2$  кривые пеленга будут гиперболами, проходящими через точки  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 12.3), доказатель-

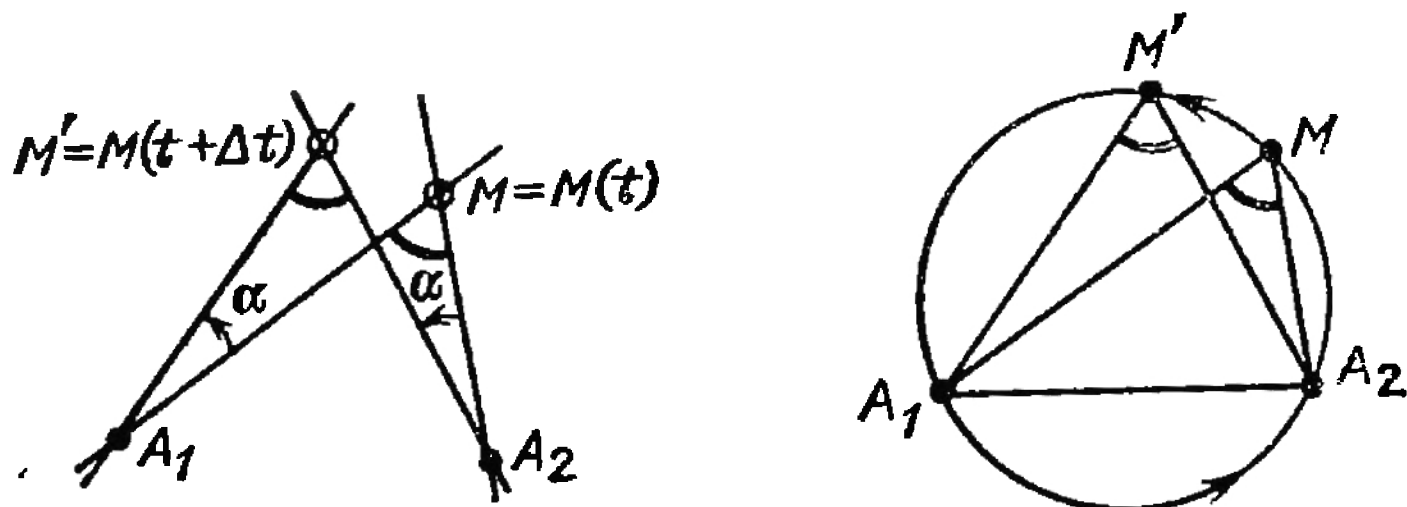


Рис. 12.2

ство чего мы не приводим. Попробуйте нарисовать какие-нибудь кривые пеленга с  $\omega_1 = \pm 2\omega_2$ .

**Т е о р е м а.** Если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несоизмеримы, то любая кривая пеленга всюду плотно заполняет всю плоскость,

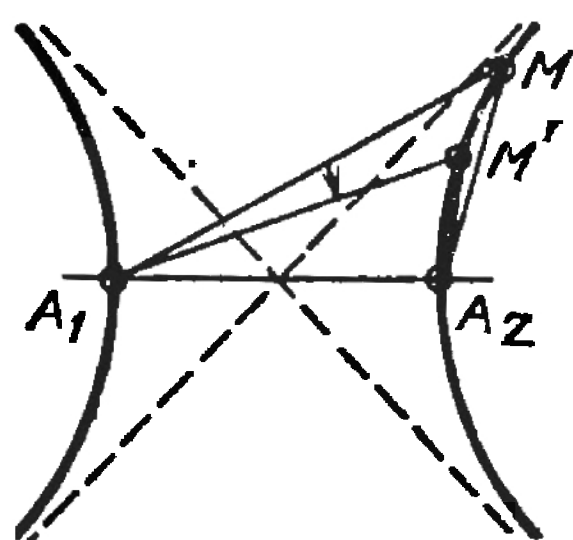


Рис. 12.3

т. е. пересекает любой круг на плоскости (где бы он ни лежал и сколь бы мал он ни был).

Нетрудно вывести эту теорему из теоремы Якоби. Мы поступим, однако, чуть изящнее — построим отображение  $f_\Pi$  тора  $\mathbb{T}$  в плоскость  $\mathbb{R}^2$ , при котором траектории обмотки тора с частотами  $\omega_1, \omega_2$  перейдут в соответствующие кривые пеленга.

Это отображение  $f_\Pi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  (естественно его назвать «пеленгом») чрезвычайно просто — точке тора  $M$  с координатами  $\psi_1, \psi_2$  мы ставим в соответствие точку  $M'$  пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2$ , проходящих через наши две точки  $A_1$  и  $A_2$  и образующих с прямой  $A_1A_2$  углы  $\psi_1$  и  $\psi_2$  соответственно (рис. 12.4). Таким образом, тор  $\mathbb{T}$  — конфигурационное пространство точек  $M$ . При этом мы считаем, что на каждой из прямых  $l_1$  и  $l_2$  выбраны направления, и углы  $\psi_1, \psi_2$  отсчитываются от направления луча  $A_1A_2$  до этих выбранных направлений. Если оказывается, что прямые  $l_1(\psi_1)$  и  $l_2(\psi_2)$  параллельны, то соответствующая точка тора переходит «в бесконечность» (так будет на «диагонали» тора  $\psi_1 = \psi_2$  и на парал-

лельной «кривой»  $\psi_2 = \psi_1 \pm \pi$ ). Отображение  $f_n$  выбрано именно так, чтобы при движении конфигурационной точки тора по траектории обмотки:

$$\psi_1 = \omega_1 t + \varphi_1, \quad \psi_2 = \omega_2 t + \varphi_2$$

образ этой точки на плоскости двигался по кривой пеленга! (Обдумайте это утверждение.) Отображение  $f_n$  будет отображением тора на всю плоскость, причем даже ч е т ы р е х к р а т н ы м — точки  $(\psi_1, \psi_2)$ ,  $(\psi_1 + \pi, \psi_2)$ ,  $(\psi_1, \psi_2 + \pi)$ ,

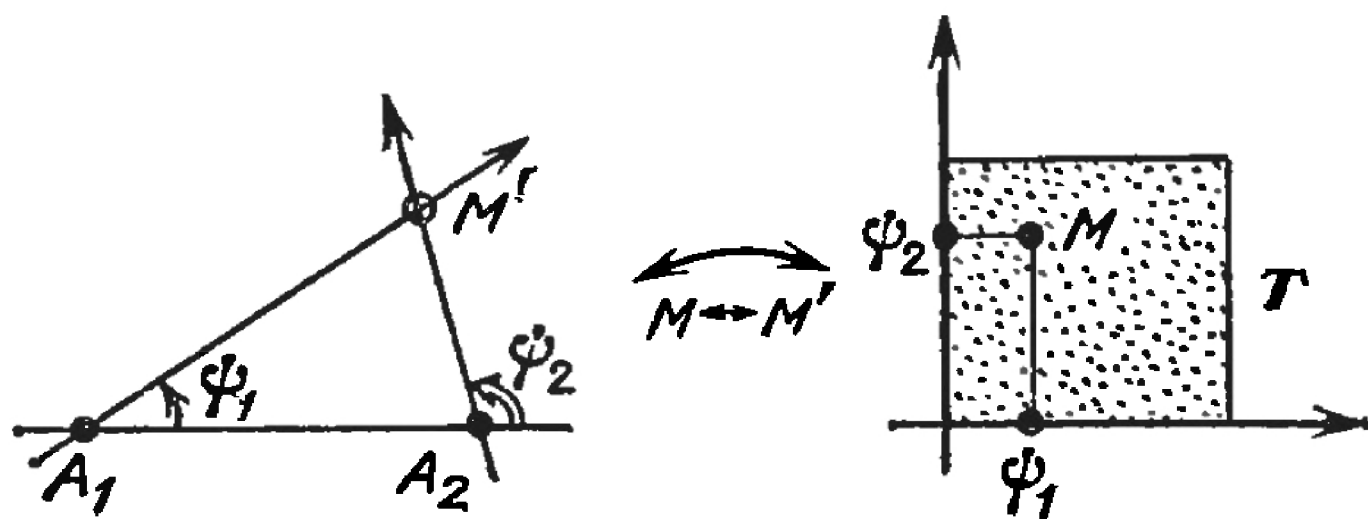


Рис. 12.4

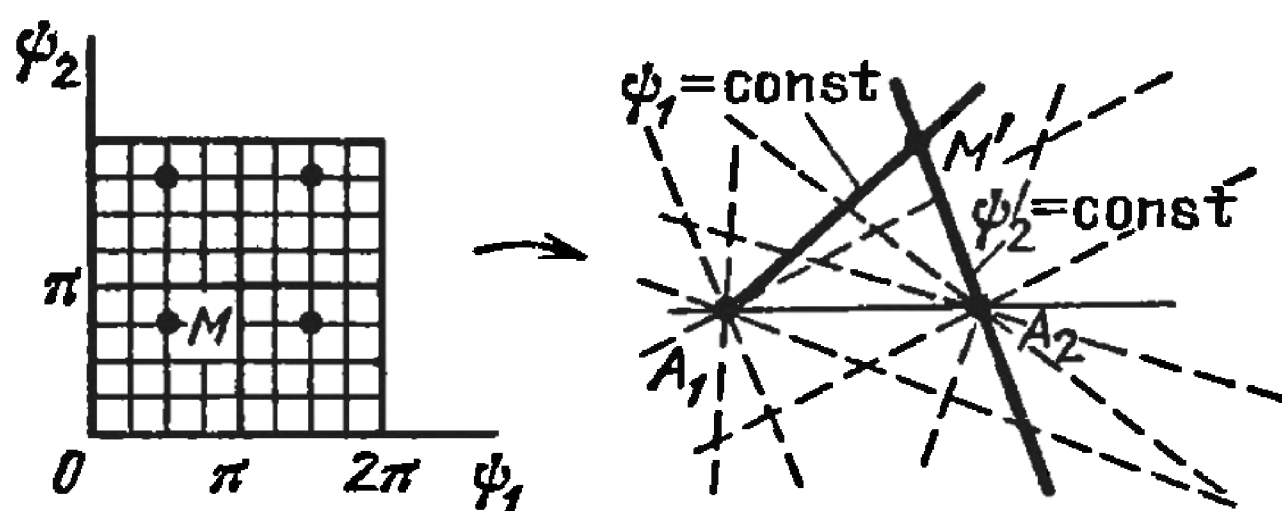


Рис. 12.5

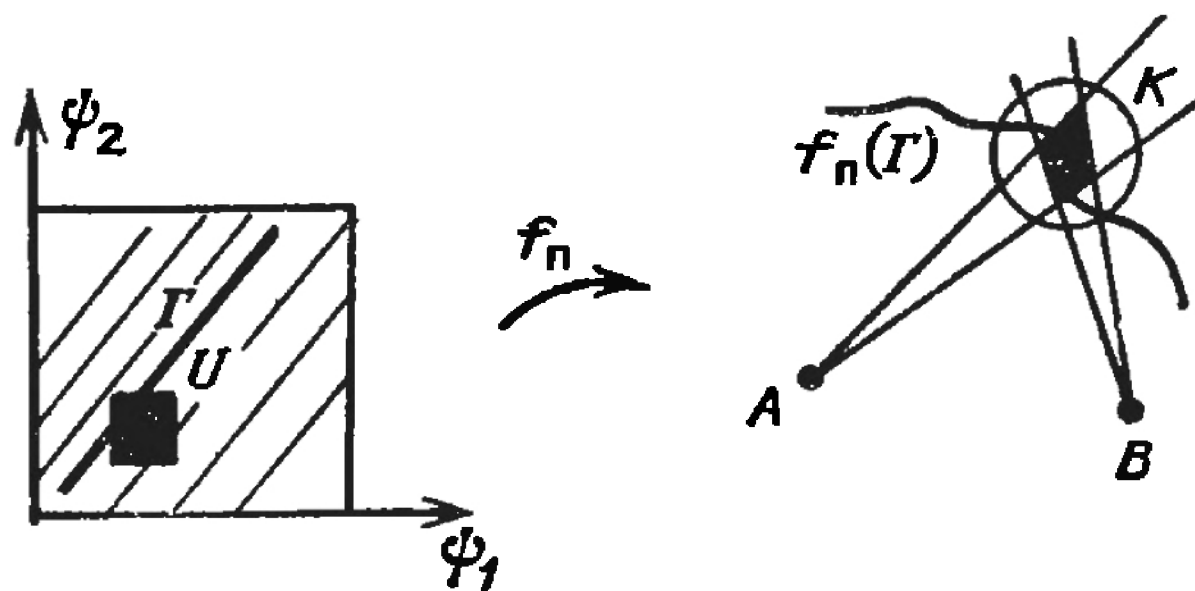


Рис. 12.6

$(\psi_1 + \pi, \psi_2 + \pi)$  при  $\psi_1 \neq \psi_2$  и  $0 < \psi_1 < \pi$ ,  $0 < \psi_2 < \pi$  переходят в одну и ту же точку плоскости. Сетка параллелей и меридианов на торе при таком отображении переходит в сетку, образованную пересечениями прямых, проходящих через точки  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 12.5).

Если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несоизмеримы, то на торе траектория  $\Gamma$  его обмотки всюду плотна, и отсюда немедленно следует всюду плотность кривой пеленга  $f_n(\Gamma)$ . Действительно, чтобы показать, что кривая пеленга заденет кружок  $K$  (рис. 12.6), рассмотрим прямоугольник (или квадрат)  $U$  на торе  $\mathbb{T}$ , переходящий при отображении  $f_n$  внутрь круга  $K$ . Поскольку траектория  $\Gamma$  пересекает  $U$  (что следует из всюду плотности  $\Gamma$  на торе), кривая пеленга  $f_n(\Gamma)$  пересекает  $K$ !

На этом мы закончим рассмотрение вопросов, связанных с обмотками торов, и вновь возвратимся к бильярдам.

## ГЕОМЕТРИЯ И АРИФМЕТИКА СТОЛКНОВЕНИЙ

.....

П р и д в о р н ы й:

Эй, музыканты!

Входит Мардиан.

К л е о п а т р а:

Нет, не надо их, —

Давай, в шары сыграем, Хармиана.

В. Шекспир. «Антоний и Клеопатра»

В этой части книги будет исследована механическая система «газ абсолютно упругих шаров» — система шаров, упруго сталкивающихся друг с другом, а также со стенками сосуда, в который эта система помещена. В физике часто пользуются такой моделью при описании поведения реального газа, т. е. считают молекулы газа твердыми шарами, а столкновения между ними — упругими. В дальнейшем мы часто для удобства шары будем называть *молекулами*. В нормальных условиях число содержащихся в  $1 \text{ см}^3$  молекул воздуха очень велико — их порядка  $10^{23}$ , и от многократных столкновений молекул друг с другом возникает «хаос» — равномерное распределение молекул.

Изучение движения молекул газа относится к области физики, называемой *статистической механикой*. Основы этой науки были заложены в трудах Максвелла, Больцмана, Гиббса. Людвиг Больцман \*) выдвинул так называемую «эргодическую гипотезу», в настоящее время носящую его имя и состоящую в том, что система «газ шаров» эргодична \*\*). На этой гипотезе основан вывод известных из школьного курса физики законов Бойля — Мариотта, Гей-Люссака, уравнения Клапейрона — Менделеева и других уравнений молекулярно-кинетической теории газа. Однако сама гипотеза Больцмана до сих пор доказана только для частных случаев.

---

\*) Людвиг Больцман (1844—1906) — выдающийся австрийский ученый, работы которого оказали огромное влияние на развитие фундаментальной физики в силу их принципиальной новизны и глубины. Относящаяся к статистической механике эргодическая гипотеза отражает лишь небольшую часть чрезвычайно разносторонней научной деятельности Л. Больцмана.

\*\*) О понятии эргодичности см. конец введения.

Выдающийся вклад в решение этой проблемы и в обоснование статистической механики внесли советские ученые Н. С. Крылов и Я. Г. Синай. Важной идеей в их исследованиях явилось то, что газ можно заменить бильярдом, правда, в очень многомерной и криволинейной области специального вида. Возникновение многомерного пространства говорит о сложности рассматриваемой задачи. Сведение системы абсолютно упругих шаров к системе бильярдного типа впервые появилось в книге Н. С. Крылова «Работы по обоснованию статистической физики» (М.: Изд-во АН СССР, 1950), а последовательная математическая теория была развита Я. Г. Синаем, который в 1970 г. в работе «Динамические системы с упругими отражениями» (см. [17]) доказал, что уже система из двух твердых дисков в прямоугольнике является эргодичной.

В этой части мы остановимся только на простейших геометрических и «арифметических» свойствах «газа шаров». Геометрию столкновений отражает описание конфигурационного пространства системы, сведение ее к бильярду и описание поведения полученной бильярдной частицы; а арифметику — подсчет числа столкновений между шарами.

Изучение геометрии и арифметики столкновений в системе **д в у м е р н ы х** дисков или **т р е х м е р н ы х** (а тем более многомерных) шаров довольно сложно для начинающего читателя. Поэтому эту центральную тему мы поставили в конец части III и отметили ее двумя звездочками — гл. 7 при первом чтении можно пропустить. Взамен этого в гл. 5 и 6 мы подробно рассматриваем модель **о д н о м е р н о г о** «газа» — систему упруго сталкивающихся частиц на прямой или ее части (полупрямой или отрезке). Эта модель существенно проще и вполне доступна школьникам. При ее изучении сначала возникает рассматривавшийся ранее бильярд в прямоугольнике, и мы можем применять уже известные из части II результаты. Попутно обнаружатся и новые эффекты, которые частично будут исследованы сразу же, а частично сведутся к изучению бильярдов в многоугольниках — эти бильярды рассматриваются в части IV.

В гл. 5 разобран простейший случай одномерного «газа» — системы **д в у х** частиц на прямой. Для него проводится относительно полное исследование.

Уже для одномерного «газа» из **т р е х** молекул полное исследование системы может быть осуществлено до конца, лишь когда молекулы не заключены в какой-либо «сосуд» —



отрезок, а свободно движутся по бесконечной прямой, сталкиваясь только друг с другом. Изучение поведения системы из трех молекул на отрезке сразу приводит к системе из большого числа молекул на прямой, и оно может быть исследовано только качественно (т. е. могут быть получены лишь некоторые оценки на различные параметры системы — число столкновений между молекулами и т. п.). Некоторые результаты этого исследования приведены в гл. 6. Трудным в этой главе является § 18, который отмечен одной звездочкой.

## Г л а в а 5

### ОДНОМЕРНЫЙ «ГАЗ» ИЗ ДВУХ МОЛЕКУЛ

В этой главе исследуется одномерный «газ» из двух молекул — двух шаров на отрезке, упруго сталкивающихся друг с другом и упруго отражающихся от концов этого отрезка. Доказывается, что указанная система эквивалентна бильярду в прямоугольном треугольнике; исследование возможных бильярдных траекторий дает возможность предсказывать поведение шаров на отрезке.

#### § 13. Два упруго сталкивающихся шара на отрезке

Пусть на отрезке  $OA$  длины  $a$  движутся без трения два точечных шара, имеющих массы  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 13.1). Считается, что шары сталкиваются между собой абсолютно упруго, т. е. если до соударения их скорости были равны  $v_1$  и  $v_2$ , то их скорости после соударения  $u_1$  и  $u_2$  вычисляются из закона сохранения импульса

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

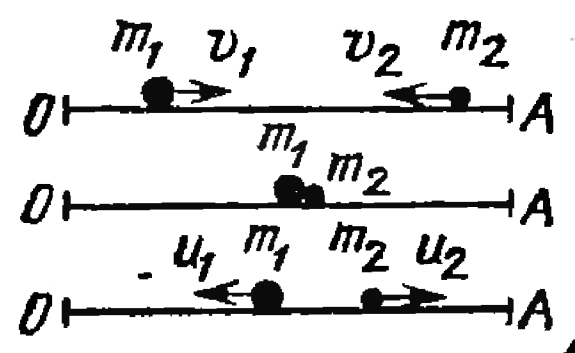


Рис. 13.1

и закона сохранения энергии

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) составляют систему уравнений, из которой, зная  $v_1$  и  $v_2$ , можно найти  $u_1$  и  $u_2$  (рис. 13.1).

**Задача 13.1.** а) Найти из системы (1), (2)  $u_1$  и  $u_2$ . б) Найти изменения импульсов  $\Delta p_1$  и  $\Delta p_2$  шаров после удара.

О т в е т.

$$a) u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2,$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2.$$

$$б) \Delta p_1 = m_1 u_1 - m_1 v_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1),$$

$$\Delta p_2 = -\Delta p_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

Импульс каждого шара меняется на *положительную величину*  $\Delta p = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} |v_2 - v_1|$ : у левого шара он *уменьшается* на  $\Delta p$ , у правого — на  $\Delta p$  *увеличивается* \*).

Явные формулы для  $u_1$  и  $u_2$  нам не потребуются, важно лишь знать, что законы сохранения (1) и (2) позволяют однозначно определить  $u_1$  и  $u_2$  по  $v_1$  и  $v_2$ . Далее, мы считаем, что шары абсолютно упруго отскакивают от границ отрезка — точек  $O$  и  $A$ . Это означает, что при соударении, скажем, первого шара с точкой  $O$ , шар отскакивает от  $O$  и движется с первоначальной скоростью, но в противоположном направлении:  $u_1 = -v_1$  (рис. 13.2).

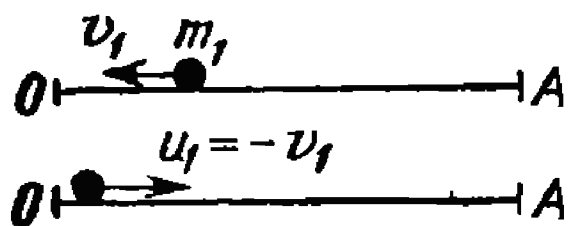


Рис. 13.2

Физическим прототипом этой математической модели служит система двух жестких (упругих) маленьких шаров масс  $m_1$  и  $m_2$ , катающихся без трения в тяжелом желобе  $OA$  со стенками  $O$  и  $A$ . Иногда эту систему мы будем называть «одномерным газом двух молекул».

Сформулируем интересующие нас вопросы.

1. При каких начальных скоростях и положениях шаров движение системы двух шаров периодически?

2. Какие бывают непериодические режимы движения шаров?

Введем на отрезке  $OA$  систему координат  $Ox$ , выбрав точку  $O$  за начало отсчета, и обозначим  $x_1$  и  $x_2$  координаты шаров. В промежутке времени между соударениями (шаров друг с другом или одного из них с соответствующей стенкой) скорости шаров  $v_1$  и  $v_2$  не меняются, а координаты

\*) Заметим, что при столкновении скорость правого шара может только увеличиться (хотя ее модуль может и уменьшиться, если, например, шар двигался влево и его скорость была отрицательной).

ты  $x_1$  и  $x_2$  меняются равномерно:

$$x_1 = v_1 t + a_1, \quad x_2 = v_2 t + a_2. \quad (3)$$

После соударения скорости  $v_1$  и  $v_2$  заменяются на скорости  $u_1$  и  $u_2$ , и движения опять равномерны:

$$x_1 = u_1 t + b_1, \quad x_2 = u_2 t + b_2. \quad (4)$$

В принципе, по начальным положениям и скоростям шаров можно последовательно вычислять моменты соударений, пересчитывать скорости (с помощью формул из задачи 13.1 при соударении шаров, и по формулам  $u_1 = -v_1$ ,  $u_2 = v_2$  или  $u_1 = v_1$ ,  $u_2 = -v_2$  при соударении первого или второго шара со стенкой); после этого можно изобразить на плоскости  $Otx$  графики движения шаров  $x = x_1(t)$  и  $x = x_2(t)$ , что, однако, нетрудно сделать лишь в случае  $m_1 = m_2$ .

**Задача 13.2.** Доказать, что после столкновения шары равной массы обмениваются скоростями:  $u_1 = v_2$ ,  $u_2 = v_1$ .

**Решение.** При  $m_1 = m_2$  система (1), (2) принимает вид

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= v_1 + v_2, \\ u_1^2 + u_2^2 &= v_1^2 + v_2^2. \end{aligned}$$

Подстановкой  $u_2$  из первого уравнения во второе убеждаемся, что эта система имеет не более двух решений (так как получается квадратное уравнение относительно  $u_1$ ). Решения этой системы очевидны — это  $(u_1, u_2) = (v_1, v_2)$  и  $(u_1, u_2) = (v_2, v_1)$ . Первое из них лишено физического смысла (если  $u_1 = v_1$ ,  $u_2 = v_2$ , то это соответствует тому, что шарики проходят друг через друга, не меняя скоростей!). Действительности соответствует решение  $u_1 = v_2$ ,  $u_2 = v_1$ , т. е. шары обмениваются скоростями.

Теперь можно проследить, что происходит с графиками  $x = x_1(t) = v_1 t + a_1$  и  $x = x_2(t) = v_2 t + a_2$  после того, как шары

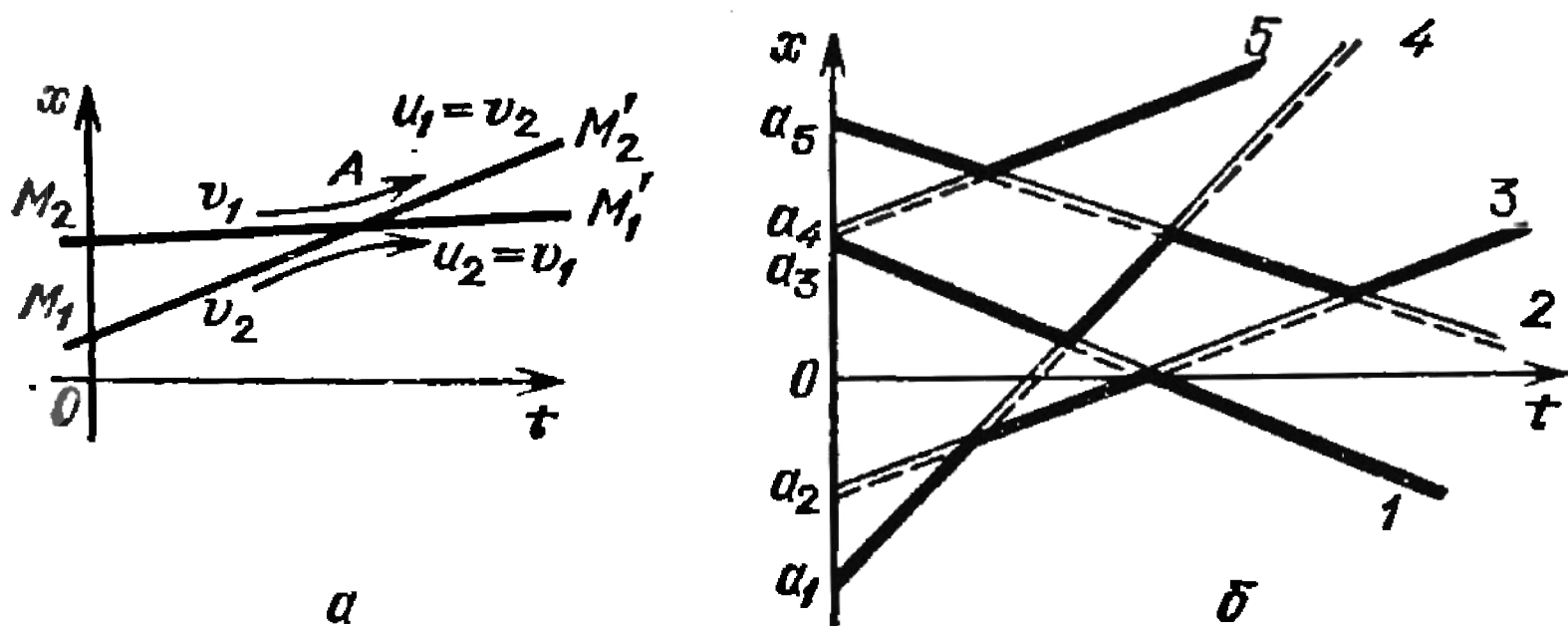


Рис. 13.3

равных масс сталкиваются — соответствующие прямые, пересекаясь, «обмениваются» угловыми коэффициентами, и графики движения шаров на плоскости  $Gtx$  — это

симметричные друг к другу ломаные  $M_1AM'_1$  и  $M_2AM'_2$  (рис. 13.3,а).

**Задача 13.3.** На оси  $Ox$  движутся  $n$  шаров одинаковой массы. Как выглядят графики движения всех этих шаров на плоскости  $Otx$ , если шары сталкиваются между собой абсолютно упруго и только попарно (тройные столкновения исключаются)? (Рассмотрите сначала случаи  $n=3$  и 4.) Каково максимальное число столкновений этих шаров (после которого шары разлетаются без столкновений)? Может ли произойти бесконечное число соударений? (Напомним, что в этой задаче на оси  $Ox$  нет никаких «стенок».)

**Решение.** Совокупность графиков движения  $n$  шаров равных масс представляет собой объединение  $n$  лучей на плоскости  $Otx$ , проведенных из начальных положений шаров  $x=a_i$  (при  $t=0$ ) с угловыми коэффициентами  $v_i$  (рис. 13.3,б); по такой картинке легко проследить график движения  $x=x_i(t)$ . (Из рисунка видно, что первый шар после разлета имеет скорость  $v_3$ , второй —  $v_5$ , третий —  $v_2$ , четвертый —  $v_1$  и пятый —  $v_4$ .) Видно, что максимальное число  $N_{\max}$  соударений  $n$  шаров равных масс равно максимальному числу точек попарных пересечений  $n$  лучей на плоскости. Поскольку каждые два луча могут пересекаться только в одной точке,  $N_{\max}$  равно числу пар из  $n$  лучей, т. е.  $N_{\max} = C_n^2 = n(n-1)/2$ . Физически  $N_{\max}$  достигается, например, так: шары движутся слева направо, причем начальная скорость каждого шара больше скорости его правого соседа.

Чтобы уяснить, как ведут себя графики движения системы двух шаров на отрезке, осталось рассмотреть, что происходит, например, с графиком  $x=x_2(t)=v_2t+a_2$  после того, как второй шар сталкивается со

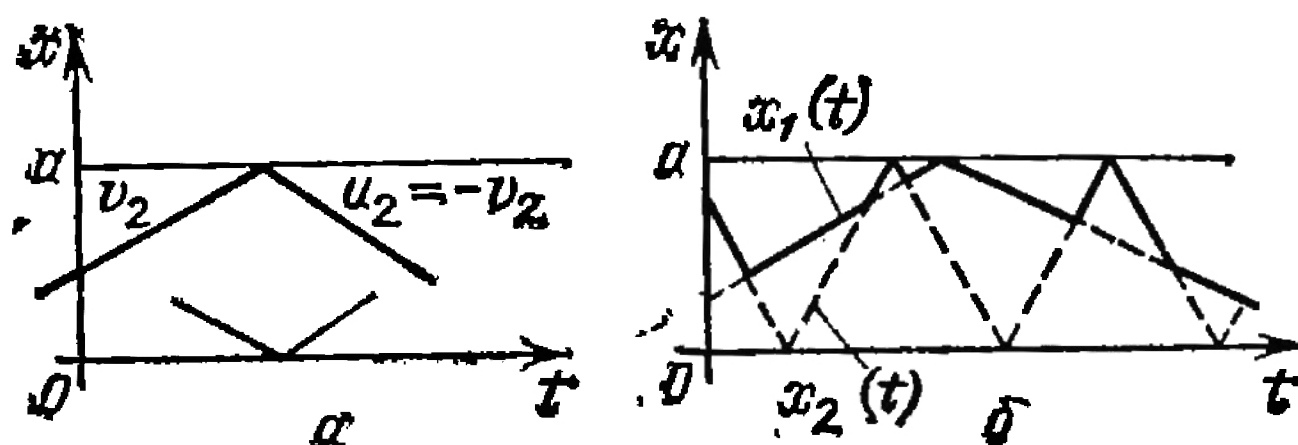


Рис. 13.4

стенкой  $A$ . Этот график заменяется на  $x=x_2(t)=u_2t+b_2$ , где  $u_2=-v_2$ ; таким образом, угловой коэффициент графика меняет знак, как только  $x=x_2(t)$  становится равным  $a$  (т. е. второй шар налетает на стенку), и график как бы «отражается» от прямой  $x=a$ . Аналогично, график  $x=x_1(t)$  при столкновении первого шара со стенкой  $O$  отражается от прямой  $x=0$  (рис. 13.4,а).

Сейчас мы уже можем нарисовать графики  $x=x_i(t)$  и  $x=x_2(t)$  движения двух шаров равной массы на отрезке (см. рис. 13.4,б). Для этого достаточно знать

лишь начальные положения и начальные скорости шаров.

**Задача 13.4.** Доказать с помощью описанных графиков, что движение двух шаров равной массы на отрезке  $OA$  периодически тогда и только тогда, когда начальные скорости шаров  $v_1$  и  $v_2$  соизмеримы.

**З а м е ч а н и е.** Мы не обсуждаем здесь вопроса о том, что происходит, когда оба шара одновременно налетают на одну и ту же стенку. Эти особые движения анализируются ниже.

В общем случае  $m_1 \neq m_2$  рисовать графики  $x = x_1(t)$  и  $x = x_2(t)$  — довольно трудоемкое занятие, ибо закон изменения скоростей при столкновении не есть просто обмен скоростями. Налетая на тяжелый шар, легкий отскакивает, чуть изменяя его скорость (рис. 13.5; для наглядности мы рисуем шары толстыми, по предположению же они точечные). Как же быть? Выход из положения таков.

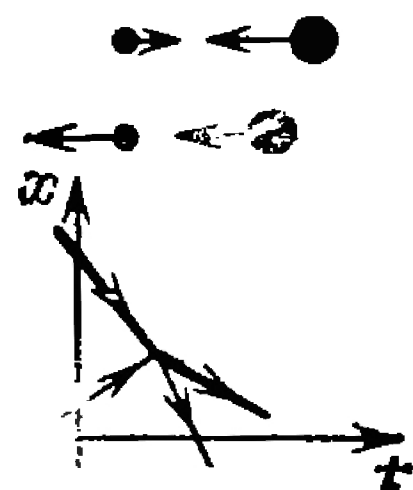


Рис. 13.5

Будем следить за движением шаров одновременно, т. е. рассмотрим *конфигурационное пространство*, определенное в общем виде в § 3. Именно, если шары находятся в точках  $x = x_1$  и  $x = x_2$ , этому положению системы поставим в соответствие точку  $M$  на плоскости  $Ox_1x_2$ , имеющую координаты  $(x_1, x_2)$ . Плоскость  $Ox_1x_2$  — конфигурационное пространство нашей системы. При движении шаров на отрезке их координаты  $x_1$  и  $x_2$  меняются во времени; таким образом, изменяются во времени и координаты  $(x_1, x_2)$  точки  $M$  плоскости  $Ox_1x_2$ , т. е. эта (одна!) точка движется по плоскости  $Ox_1x_2$ . Напомним, что точка  $M$  называется *изображающей* или *конфигурационной* точкой (отметим, что это не есть реальная — материальная — точка; это лишь «абстрактная», вспомогательная точка!). Таким образом, одновременному движению двух шаров соответствует движение конфигурационной точки  $M$  на плоскости  $Ox_1x_2$ . Поскольку в промежутках времени между столкновениями  $x_1$  и  $x_2$  меняются по линейному закону ( $x_1 = v_1 t + a_1$ ,  $x_2 = v_2 t + a_2$ ), от столкновения до столкновения точка  $M$  движется по прямой на плоскости  $Ox_1x_2$ , причем с постоянной скоростью  $v = (v_1, v_2)$ ! Эта «воображаемая» скорость изображающей точки называется *конфигурационной скоростью* точки  $M$ .

При движении шаров по отрезку  $OA$  координаты шаров подчиняются неравенствам  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq a$ . Эти неравенства задают на плоскости  $Ox_1x_2$  равнобедренный прямоуголь-

ный треугольник  $Q$ , ограниченный прямыми  $x_1=0$ ,  $x_1=x_2$  и  $x_2=a$ , и конфигурационная точка движется в пределах этого треугольника (рис. 13.6,а). Если точка  $M$  попадает на его гипотенузу  $OB$  ( $x_1=x_2$ ), то это соответствует столкновению шаров между собой. Соударению же шаров со стенками  $O$  и  $A$  соответствует «столкновение» конфигурационной точки  $M$  с катетами  $OA$  ( $x_1=0$ ) и  $AB$  ( $x_2=a$ ) треугольника  $Q$ .

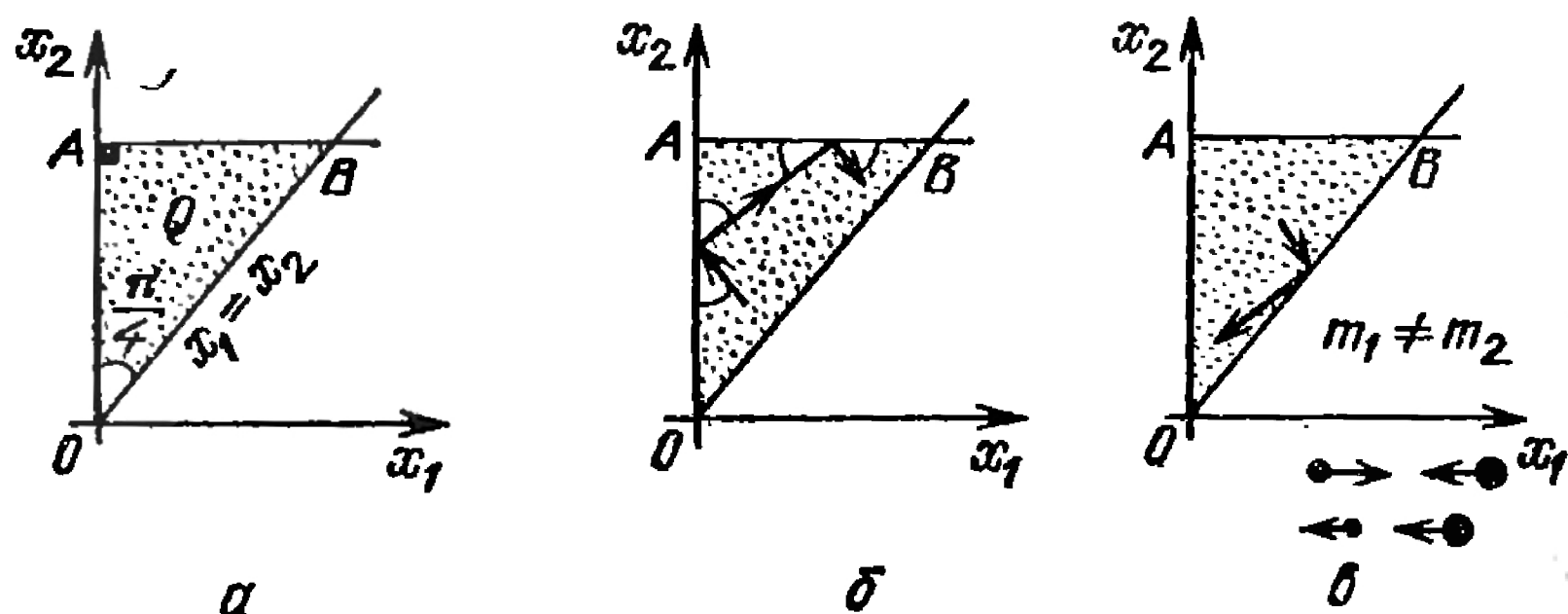


Рис. 13.6

Итак, от столкновения до столкновения (т. е. при движении внутри треугольника  $Q$ ) конфигурационная точка движется по прямой со скоростью  $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$ . После «соударения» точки  $M$  с границей треугольника скорости  $v_1$  и  $v_2$  заменяются на  $u_1$  и  $u_2$ , точка  $M$  «отскакивает» от границы и снова движется, но уже по новой прямой с новой скоростью  $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$ . Посмотрим теперь, как точка  $M$  отскакивает от границ. (Еще раз отметим, что точка  $M$ , ее движение по треугольнику и отскакивание от границы — воображаемые, однако они описывают реальное движение двух шаров по отрезку  $OA$ .)

При соударении точки  $M$  с катетом  $OA$  ( $x_1=0$ ) конфигурационная скорость  $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$  заменяется на  $\mathbf{u}=(u_1, u_2)=(-v_1, v_2)$ , т. е. меняется ее компонента по оси  $Ox_1$ . Очевидно, это соответствует тому, что  $M$  отражается от  $OA$  по закону упругого удара (угол падения равен углу отражения). При столкновении  $M$  с катетом  $AB$  ( $x_2=a$ ) скорость  $\mathbf{v}=(v_1, v_2)$  заменяется на  $\mathbf{u}=(u_1, u_2)=(v_1, -v_2)$ , т. е. меняется ее компонента по оси  $Ox_2$ ; это соответствует упругому отражению точки  $M$  от катета  $AB$  (рис. 13.6,б). К сожалению, «закон отскакивания» точки  $M$  от гипотенузы  $AB$ , определяемый из законов сохранения (1) и (2), вовсе не совпадает с законом упругого отражения, если  $m_1 \neq m_2$ . Проще всего в этом убедиться, изобразив траек-



торию точки  $M$  для соударения легкого и тяжелого шаров (см. рис. 13.6, в). Поэтому при  $m_1 \neq m_2$  траектории точки  $M$  в треугольнике  $Q$  рисовать не так уж просто. Однако положение можно исправить, и это мы сделаем в следующем параграфе.

**Задача 13.5.** Доказать, что при  $m_1 = m_2$  закон отскокивания конфигурационной точки  $M$  от гипотенузы есть закон упругого отражения.

**Решение.** В случае  $m_1 = m_2$  при столкновении шаров происходит обмен скоростями:  $u_2 = v_1$ ,  $u_1 = v_2$  (см. задачу 13.2). Следовательно, при соударении конфигурационной точки  $M$  с гипотенузой  $OB$  происходит замена  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  на  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (v_2, v_1)$ , т. е. вектор  $\mathbf{u}$  конфигурационной скорости после соударения получается из вектора  $\mathbf{v}$  перестановкой координат. Отсюда очевидно (рис. 13.7), что вектор  $\mathbf{u}$  симметричен вектору  $\mathbf{v}$  относительно биссектрисы  $OL$  координатного угла  $\angle 102$  (если отложить  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  от одной точки  $O$ ). Но это и означает, что углы, образуемые траекторией точки  $M$  до и после отскокивания от гипотенузы, равны.

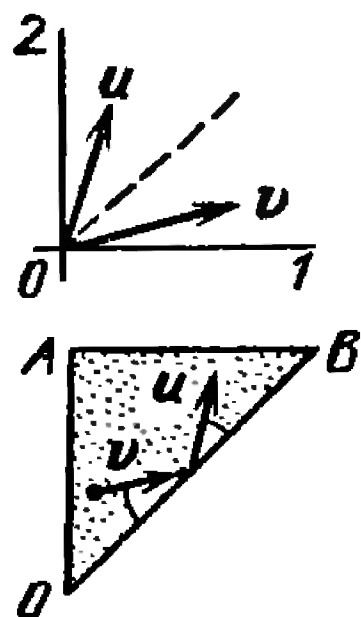


Рис. 13.7

Из задачи 13.5 вытекает много замечательных следствий. Например, нетрудно видеть, что траектории бильярда в треугольнике  $Q$  получаются из траекторий бильярда в квадрате  $OABC$  (рис.

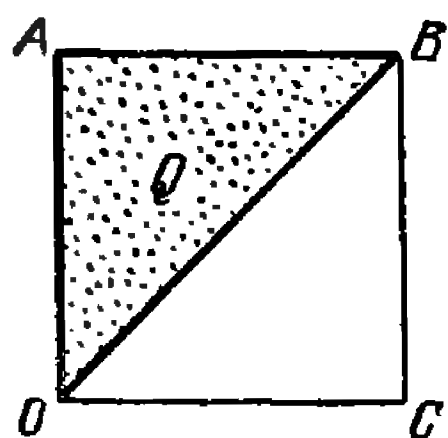


Рис. 13.8

13.8) «складыванием» квадрата по диагонали  $OB$ . Отсюда следует, что движение двух шаров равной массы на отрезке  $OA$  периодически тогда и только тогда, когда тангенс угла наклона, соответствующий бильярдной траектории, т. е.  $v_2/v_1$ , — рациональное число. Если же число  $v_2/v_1$  иррационально, то соответствующая траектория бильярда в квадрате  $OABC$  всюду плотно заполняет квадрат (см. § 9). Отсюда следует, что получающаяся из этой траектории складыванием вдоль  $OB$  траектория бильярда в треугольнике  $Q$  тоже всюду плотно заполняет треугольник (проверьте!). Для системы двух шаров на отрезке получаем такое следствие.

**Теорема.** Если два шара равной массы  $m_1 = m_2$  движутся по отрезку  $OA$  так, что их начальные скорости  $v_1$  и  $v_2$  несоизмеримы, то для любых двух сколь угодно малых интервалов отрезка  $OA$  в некоторый момент времени  $t$  первый шар будет находиться в первом интервале, а второй — во втором.

Действительно, таким положениям шаров соответствует прямоугольник  $\Pi$  со сторонами  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  в треугольнике  $OAB$  (рис. 13.9), а всюду плотная траектория обязательно пересекает  $\Pi$ !

Траектории шаров, обладающих описанным в теореме свойством, являются, таким образом, всюду плотными. Можно сказать поэтому, что для шаров равной массы

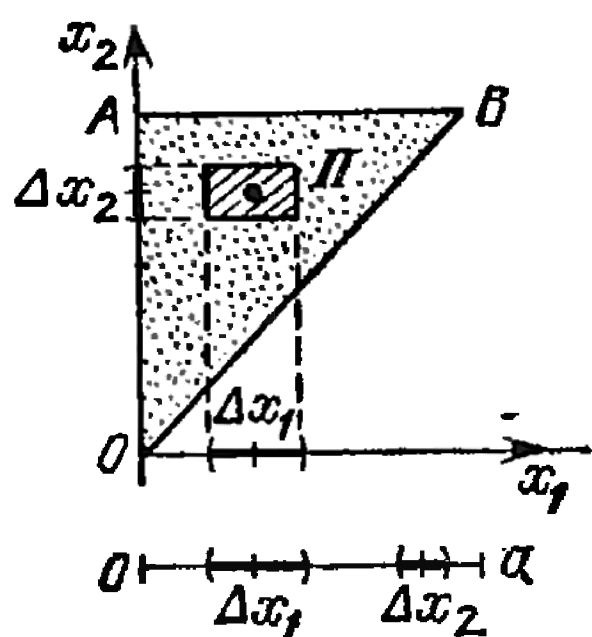


Рис. 13.9

движение на отрезке *либо периодически, либо всюду плотно*. Такие свойства движений уже обсуждались нами ранее. К ним мы еще вернемся в части IV.

Подведем итоги этого параграфа. Вместо того, чтобы следить за движением *двух* шаров на отрезке, можно следить за движением *одной* изображающей точки  $M$  в треугольнике  $Q$ . Точки этого треугольника изображают положение *обоих* шаров системы;

этот треугольник  $Q$  является *конфигурационным пространством системы двух шаров на отрезке*. Траектории точки  $M$  на  $Q$  (так называемые *конфигурационные траектории системы*) суть ломаные внутри  $Q$ . Дальнейший анализ «газа» из двух молекул проводится в следующем параграфе.

Конечно, конфигурационное пространство можно определить и для нескольких шаров на прямой. Например, для трех шаров на прямой нужно взять три оси  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  в пространстве, и по этим осям откладывать координаты первого, второго и третьего шаров. Тем самым положение трех шаров на прямой задается одной точкой в трехмерном пространстве  $Ox_1x_2x_3$ , и конфигурационное пространство  $Q$  такой системы будет уже подмножеством трехмерного пространства  $\mathbb{R}^3$ .

**Задача 13.6.** Указать в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$  конфигурационное пространство системы трех шаров на прямой  $Ox$ .

**Задача 13.7.** Нарисовать на плоскости  $\mathbb{R}^2$  конфигурационное пространство системы двух шаров на полупрямой  $x \geq 0$  (в точке  $O$  прямой поставлена упруго отражающая стенка).

**Задача 13.8.** Найти конфигурационное пространство системы трех шаров на отрезке  $0 \leq x \leq a$ . Как ведут себя конфигурационные траектории этой системы, если массы шаров одинаковы (и шары сталкиваются абсолютно упруго друг с другом и со стенками  $x=0$  и  $x=a$ )?

При рассмотрении системы *четырёх* шаров на прямой конфигурационное пространство будет уже *четы-*

р е х м е р н ы м — положение всех четырех шаров задается четырьмя числами  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Если рассматривать систему двух шаров на плоскости  $Oxy$ , то для описания их положения нужно тоже четыре числа — координаты первого шара  $(x_1, y_1)$  и координаты второго шара  $(x_2, y_2)$ , — и конфигурационное пространство снова четырехмерно. Таким образом, при анализе задач механики возникает необходимость рассматривать пространство четырех и более измерений. Но об этом мы подробно говорили уже в § 3.

В § 14 будет произведено специальное *линейное* преобразование конфигурационного пространства системы двух шаров на отрезке, в результате чего задача о поведении этой системы сведется к бильярдной задаче в треугольнике.

#### § 14. Два шара на отрезке: сведение к бильярду в треугольнике

Прежде чем сводить систему двух шаров на отрезке к бильярдной системе \*), напомним необходимые сведения из геометрии, касающиеся векторов. Для определенности будем говорить о векторах в пространстве.

Скалярным произведением  $(k, x)$  ненулевых векторов  $k$  и  $x$  называется число, равное произведению длин этих векторов  $|k|$  и  $|x|$  на косинус угла между ними:

$$(k, x) = |k| \cdot |x| \cdot \cos \varphi.$$

Из этого определения следует, что для любого числа  $\lambda$

$$(\lambda k, x) = \lambda (k, x)$$

и

$$(k, x) = (x, k).$$

Кроме того, поскольку  $|k| \cos \varphi$  есть численная величина проек-

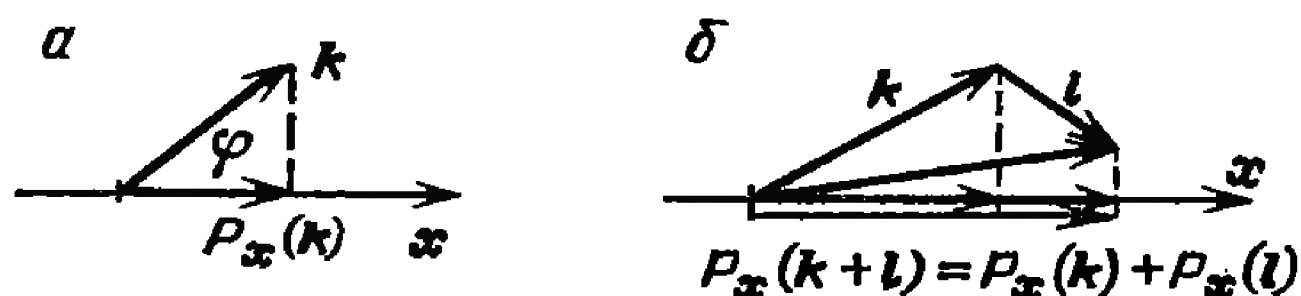


Рис. 14.1

ции вектора  $k$  на направление вектора  $x$ , которую мы обозначим  $P_x(k)$ , то (рис. 14.1, а)

$$(k, x) = |x| \cdot P_x(k).$$

Нетрудно видеть, что для любых двух векторов  $k$  и  $l$  проекция их суммы на направление вектора  $x$  равна сумме проекций век-

\*) В изложении способа сведения рассматриваемой механической системы к бильярду мы придерживаемся лекции 10 книги [10].

торов  $k$  и  $l$  на это направление (рис. 14.1,б):]

$$P_x(k+l) = P_x(k) + P_x(l).$$

Подставив эту формулу в предыдущую, получим основное свойство скалярного произведения — **линейность**:

$$(k+l, x) = (k, x) + (l, x).$$

Пусть теперь в пространстве выбрана ортогональная система координат  $Ox_1x_2x_3$ , и  $e_1, e_2, e_3$  — *единичные векторы*, направленные по осям координат; пусть координаты

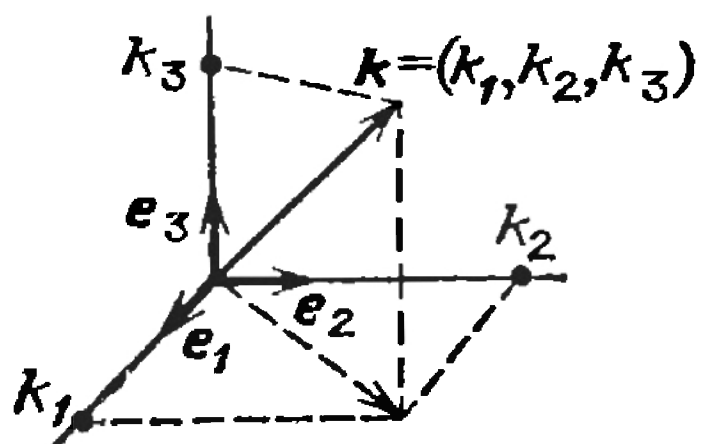


Рис. 14.2

векторов  $k$  и  $x$  в этой системе равны  $(k_1, k_2, k_3)$  и  $(x_1, x_2, x_3)$ . Это означает, что  $k = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3$  и  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$  (рис. 14.2). Подставим эти выражения вместо  $k$  и  $x$  в скалярное произведение  $(k, x)$ ; воспользовавшись выписанными выше формулами, а также тем, что  $(e_1, e_1) = (e_2, e_2) = (e_3, e_3) = 1$ , а  $(e_1, e_2) = (e_1, e_3) = (e_2, e_3) = 0$  (так как  $\cos 0 = 1$ , а  $\cos(\pi/2) = 0$ ), получим

формулу для скалярного произведения в координатах:

$$(k, x) = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3.$$

В случае плоскости соответственно получим

$$(k, x) = k_1x_1 + k_2x_2.$$

Вернемся теперь к результатам § 13, касающимся системы двух шаров масс  $m_1$  и  $m_2$  на отрезке  $0 \leq x \leq a$ . Напомним эти результаты. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — координаты шаров; тогда  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq a$ . Эти неравенства задают на плоскости  $Ox_1x_2$  треугольник  $Q$ , и положение обоих шаров определяет конфигурационную точку  $M = (x_1, x_2)$  в этом треугольнике. При движении шаров по отрезку координаты  $x_1$  и  $x_2$  меняются, а конфигурационная точка  $M$  движется по треугольнику  $Q$ . Между двумя столкновениями скорости  $v_1$  и  $v_2$  шаров и конфигурационная скорость  $v = (v_1, v_2)$  изображающей точки не меняются, и конфигурационная точка  $M$  движется по отрезку внутри треугольника. «Соударению» точки  $M$  с катетами треугольника  $OA$  и  $OB$  соответствует столкновение первого или второго шара на отрезке  $OA$  с соответствующей стенкой ( $O$  или  $A$ ), и после столкновения конфигурационная скорость становится равной  $u = (-v_1, v_2)$  или  $u = (v_1, -v_2)$ , что соответствует упругому отражению точки  $M$  от катетов. Если  $m_1 \neq m_2$ , то соударение точки  $M$  с гипотенузой, соответствующее столкновению шаров друг с другом, ведет к замене конфигурационной скорости  $v = (v_1, v_2)$  на скорость  $u = (u_1, u_2)$ , вычисляемую из законов сохранения импульса и энергии (см. формулы (1), (2) § 13),

и точка  $M$  отскакивает от гипотенузы вовсе не по закону упругого отражения. Задача, которую мы сейчас решим, заключается в том, чтобы изменить координаты  $x_1$  и  $x_2$  так, чтобы и последнее из описанных соударений точки  $M$  происходило как в бильярде — «угол падения равен углу отражения».

Законы сохранения импульса и энергии нам удобнее записать в виде

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const}, \quad (1)$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = \text{const}. \quad (2)$$

Введем вместо  $x_1$  и  $x_2$  координаты  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$  по формулам

$$\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1} x_1, \quad \tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} x_2,$$

т. е. «растянем» плоскость  $Ox_1x_2$  по осям  $Ox_1$  и  $Ox_2$  в  $\sqrt{m_1}$  и  $\sqrt{m_2}$  раз соответственно. Положение первого шара будет определять теперь координата  $\tilde{x}_1$ , а второго — координата  $\tilde{x}_2$ ; положению шаров сопоставим изображающую точку  $\tilde{M}$  с координатами  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  на плоскости  $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ . Поскольку

$$x_1 = \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}}, \quad x_2 = \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}},$$

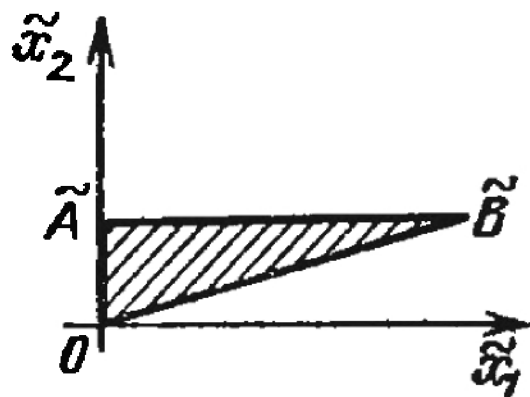


Рис. 14.3

а  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяют неравенствам  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq a$ , числа  $\tilde{x}_1$  и  $\tilde{x}_2$  удовлетворяют неравенствам  $0 \leq \tilde{x}_1/\sqrt{m_1} \leq \tilde{x}_2/\sqrt{m_2} \leq a$ , и изображающие точки  $\tilde{M}$  заполняют на плоскости  $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$  треугольник  $\tilde{Q} = O\tilde{A}\tilde{B}$ , ограниченный прямыми  $\tilde{x}_1 = 0$  ( $O\tilde{A}$ ),  $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} a$  ( $\tilde{A}\tilde{B}$ ),  $\tilde{x}_1/\sqrt{m_1} = \tilde{x}_2/\sqrt{m_2}$  ( $O\tilde{B}$ ) (рис. 14.3). Нетрудно вычислить координаты точки  $B$ :  $\tilde{b}_1 = a\sqrt{m_1}$ ,  $\tilde{b}_2 = a\sqrt{m_2}$ , откуда следует, что  $\vec{O\tilde{B}} = a \cdot \vec{m}$ , где  $\vec{m} = (\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$ .

Движению шаров по отрезку  $OA$  соответствует движение изображающей точки  $\tilde{M}$  в треугольнике  $\tilde{Q}$ , причем, как и раньше, конфигурационная скорость  $\tilde{v}$  не меняется в течение промежутка времени между столкновениями, т. е. при движении точки  $\tilde{M}$  внутри треугольника  $\tilde{Q}$ . Новая конфигурационная скорость  $\tilde{v}$  есть

$$\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = (\sqrt{m_1} v_1, \sqrt{m_2} v_2).$$

Действительно, так как  $\tilde{x}_k = V \overline{m_k} x_k$ ,

$$\tilde{v}_k = \frac{d\tilde{x}_k}{dt} = V \overline{m_k} \frac{dx_k}{dt} = V \overline{m_k} v_k, \quad k=1, 2.$$

Докажем, что изображающая точка  $\tilde{M}$  при соударении с любой из сторон треугольника  $\tilde{Q}$  отражается по закону упругого соударения.

Действительно, легко видеть, что при соударении  $\tilde{M}$  с катетами  $O\tilde{A}$  и  $O\tilde{B}$  конфигурационная скорость  $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ , как и раньше, становится равной  $\tilde{u} = (-\tilde{v}, \tilde{v}_2)$  или  $\tilde{u} = (\tilde{v}_1, -\tilde{v}_2)$ , что соответствует упругому соударению с катетами. Соударение  $\tilde{M}$  с гипотенузой  $O\tilde{B}$  подчиняется законам сохранения (1) и (2). Перепишем их в новых обозначениях  $\tilde{v}_1 = V \overline{m_1} v_1$ ,  $\tilde{v}_2 = V \overline{m_2} v_2$ . Закон сохранения энергии (2) примет вид

$$\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 = \text{const},$$

т. е. при соударении с гипотенузой квадрат длины вектора  $\tilde{v}$  не меняется, откуда

$$|\tilde{v}| = \text{const}. \quad (3)$$

Закон сохранения импульса (1) дает

$$V \overline{m_1} \tilde{v}_1 + V \overline{m_2} \tilde{v}_2 = \text{const},$$

или (см. выше формулу для скалярного произведения)

$$(\tilde{v}, m) = \text{const},$$

где  $m = (V \overline{m_1}, V \overline{m_2})$ . Поскольку  $m$  — постоянный вектор, а  $(\tilde{v}, m) = |\tilde{v}| \cdot |m| \cdot \cos \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между векторами  $\tilde{v}$  и  $m$ , то из того, что  $|\tilde{v}|$  не меняется (см. (3)), следует, что косинус угла между  $\tilde{v}$  и  $m$  при соударении изображающей точки с гипотенузой  $O\tilde{B}$  также не меняется. Вспомнив, что  $\overrightarrow{O\tilde{B}} = a \cdot m$ , т. е. гипотенуза имеет то же направление, что и вектор  $m$ , мы получаем, что при этом соударении не меняется косинус угла между конфигурационной скоростью  $\tilde{v}$  и гипотенузой. Таким образом, если  $\varphi_1$  — угол падения конфигурационной точки  $\tilde{M}$ ,  $\varphi_2$  — угол ее отражения, то  $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2$ , откуда следует, что  $\varphi_1 = \varphi_2$ , что и требовалось доказать! (Возможность  $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$  исключается из физических соображений — почему?)



Итак, доказана

**Т е о р е м а 1.** Замена координат  $\tilde{x}_k = \sqrt{m_k} x_k$  ( $k=1,2$ ) сводит систему двух шаров массы  $m_1$  и  $m_2$  на отрезке длины  $a$  к бильярду в прямоугольном треугольнике  $Q_\alpha = O\tilde{A}\tilde{B}$  с катетами  $\tilde{A}\tilde{B} = a\sqrt{m_1}$  и  $O\tilde{A} = a\sqrt{m_2}$ , т. е. с острым углом  $\angle\tilde{A}O\tilde{B}$ , равным

$$\alpha = \arctg \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$$

Теперь естественно попытаться решить для системы шаров с массами  $m_1, m_2$  на отрезке  $[0, a]$ , т. е. для бильярда в треугольнике  $Q_\alpha$ , общую проблему бильярдных траекторий. Эта проблема исследована нами для бильярда в прямоугольнике сведением к обмоткам тора. К сожалению,

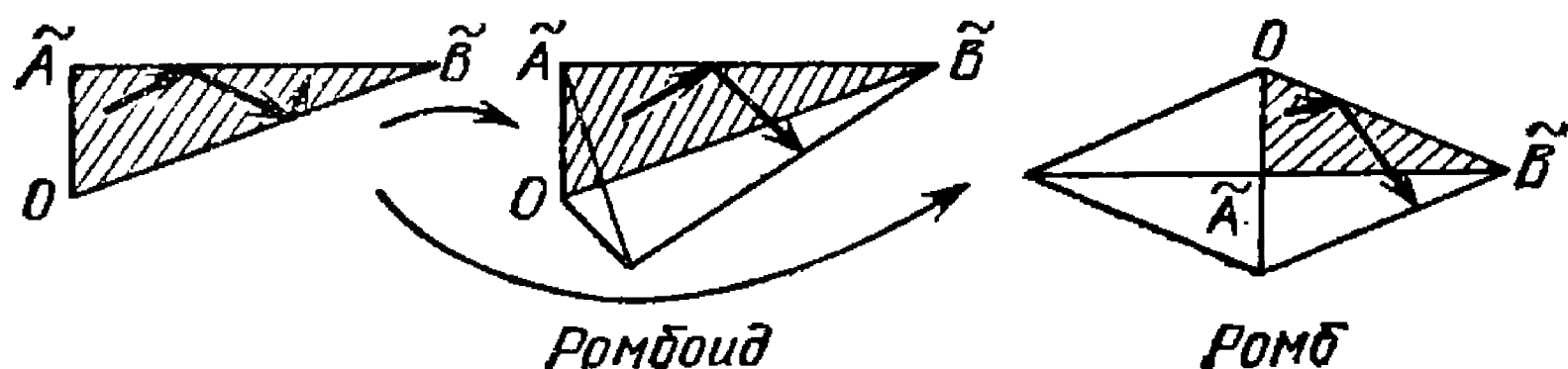


Рис. 14.4

геометрическое сведение бильярда в  $Q_\alpha$  при  $\alpha \neq \pi/4$  к бильярду в прямоугольнике невозможно: отражениями относительно сторон треугольника можно получить бильярд в ромбоиде или ромбе, но не в прямоугольнике (рис. 14.4).

Конечно, можно попытаться свести этот бильярд непосредственно к тору (мы так «стремимся» к тору потому, что при удаче можно будет применить теорему Якоби). Это можно сделать, кроме  $\alpha = \pi/4$ , увы, еще только в случае  $\alpha = \pi/6$  (или  $\alpha = \pi/3$ ). Справедливо следующее утверждение, которое мы докажем позже, в § 22 гл. 8.

**Т е о р е м а 2.** Бильярд в прямоугольном треугольнике  $Q_\alpha$  с острым углом  $\alpha$  сводится к обмоткам тора тогда и только тогда, когда  $\alpha = \pi/4$  и  $\pi/6$  (или  $\pi/3$ ), т. е. когда  $m_1 = m_2$  и  $m_1 = 3m_2$  (или  $m_2 = 3m_1$ ).

Отметим, что не в любом прямоугольном треугольнике каждая бильярдная траектория либо периодична, либо всюду плотна: при малых величинах острого угла  $\alpha$  бильярдная траектория в прямоугольном треугольнике  $Q_\alpha$  может заполнять всюду плотно лишь некоторую подобласть этого треугольника. Пример построения такой

траектории в многоугольниках с числом сторон  $n \geq 4$  более прост и единообразен, чем для треугольника  $Q_3 (n=3)$ ; он приводится в § 25. На языке «газа» из двух молекул ситуация может быть сформулирована следующим образом:

**Т е о р е м а 3.** *Можно подобрать такое соотношение масс между шарами и выбрать такие их начальные состояния (координаты и скорости), что множество точек столкновения этих шаров на отрезке  $[0, a]$  будет либо а) конечным, либо б) всюду плотно заполнять весь отрезок  $[0, a]$ , либо в) всюду плотно заполнять конечное число непересекающихся отрезков на отрезке  $[0, a]$ .*

Этой теоремой-резюме мы и закончим параграф о системе из двух молекул на отрезке.

**З а д а ч а 14.1\*.** а) Доказать, что система трех шаров равной массы на отрезке сводится к бильярду в некотором тетраэдре. б)\* Доказать, что при подходящем выборе координат система трех шаров разных масс  $m_1, m_2, m_3$  также сводится к бильярду в некотором тетраэдре.

**З а д а ч а 14.2.** Рассмотрим систему двух шаров масс  $m_1$  и  $m_2$  на полупрямой  $x \geq 0$ , причем в точке  $x=0$  на этой прямой поставлена упруго отражающая стенка. Пусть в момент времени  $t=0$  правый шар движется по направлению к стенке. Всегда ли левый шар после конечного числа соударений оттолкнет правый? (Рассмотрите ситуацию, когда  $m_2$  гораздо больше  $m_1$ .) Верно ли, что в этой системе произойдет лишь конечное число столкновений  $N$ ? Если верно, то может ли  $N$  быть сколь угодно большим (при данных  $m_1$  и  $m_2$ )? Можно ли написать, что  $N \leq N_0$ , где число  $N_0$  зависит только от масс шаров?

**З а д а ч а 14.3\*** (см. § 15). Рассмотрим систему трех шаров масс  $m_1, m_2, m_3$  на бесконечной прямой без стенок, и пусть в начальный момент времени первый и третий шары движутся навстречу друг другу. Сможет ли второй шар растолкать первый и третий шары? (Представьте, что  $m_2$  — очень легкий пинг-понговый шарик, а  $m_1$  и  $m_3$  — массивные стальные шары.) Ответьте также в этом случае на три последние вопроса предыдущей задачи.

**З а д а ч а 14.4.** Луч света попал в зеркало, имеющее форму бесконечного а) двугранного угла, б)\* трехгранного (или многогранного) угла. В случае б) будем считать, что луч никогда не попадает точно в ребра двугранных углов. Может ли быть так, что луч «запутывается» внутри зеркала и никогда не вылетает оттуда?

**З а д а ч а 14.5.** а) Дано зеркало, имеющее форму двугранного угла величины  $\alpha$ . Вы рассматриваете в нем изображение свечи. Сколько всего изображений свечи можно увидеть? б)\*\* Ответить на тот же вопрос для зеркала, имеющего форму трехгранного угла, двугранные углы которого равны  $A, B, C$ .

## § 15. Два шара на полупрямой: сведение к бильярду в угле

В этом параграфе мы ответим на некоторые важные для дальнейшего исследования системы одномерного газа вопросы, связанные с двумя молекулами на прямой и полупрямой.

**А.** В качестве первого шага решим задачу из § 9: *может ли бильярдная траектория «запутаться» внутри угла и остаться там навсегда?*

Поставим задачу более точно. Рассмотрим бильярд в бесконечной области  $Q_1$ , ограниченной двумя сторонами угла  $A_0AA_1$  величины  $\alpha$ . Траектории бильярда в такой области

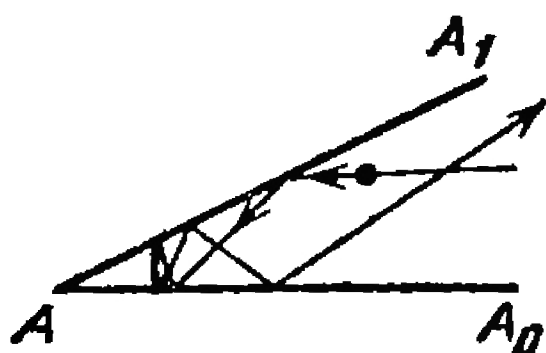


Рис. 15.1

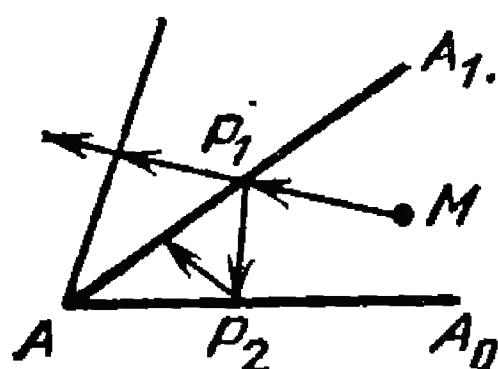


Рис. 15.2

определяются как обычно — это ломаные, по которым движется шар, упруго отражаясь от сторон угла. Отличие этого бильярда от бильярда в ограниченной области состоит в том, что в данном случае траектория может «уходить в бесконечность», т. е. после одного из соударений шар будет двигаться по лучу, никогда более не соударяясь со сторонами угла. Так будет в том случае, когда направление движения шара лежит между направлениями лучей  $AA_0$  и  $AA_1$  (рис. 15.1). Вопрос заключается в следующем: *всякая ли траектория бильярда внутри угла  $A_0AA_1$  после некоторого конечного числа  $N$  отражений от сторон угла уходит на бесконечность?*

Ответ оказывается утвердительным. Для того чтобы это доказать, рассмотрим произвольную траекторию  $MP_1P_2\dots$  и применим к ней процедуру выпрямления с помощью последовательных отражений относительно сторон угла  $A_0AA_1$  (рис. 15.2).

Если первая точка соударения  $P_1$  лежит на луче  $AA_1$ , то мы отражаем угол  $Q_1 = \angle A_0AA_1$  относительно луча  $AA_1$  и получаем угол  $Q_2 = \angle A_1AA_2$ . Затем мы отражаем угол  $Q_2$  относительно луча  $AA_2$  и получаем угол  $Q_3 = \angle A_2AA_3$  и т. д. (рис. 15.3). Применяя к отрезку  $P_1P_2$  рассматриваемой траектории  $MP_1P_2P_3\dots$  одно из упомянутых отраже-

ний, к следующему отрезку  $P_2P_3$  — два отражения (относительно  $AA_1$  и  $AA_2$ ) и т. д., мы переместим эти отрезки в углы  $Q_2, Q_3$  и т. д.; из закона «угол падения равен углу отражения» следует, что отраженные отрезки составляют луч — продолжение луча  $MP_1$  за точку  $P_1$  на плоскости.

Обратно, мы можем замостить с помощью описанных отражений часть плоскости углами  $Q_1, Q_2, \dots$ . Начертив произвольный луч  $MP_1$ , идущий из точки  $M$  внутри угла  $Q$  в сторону точки  $P_1$  на луче  $AA_1$ , теми же отражениями,

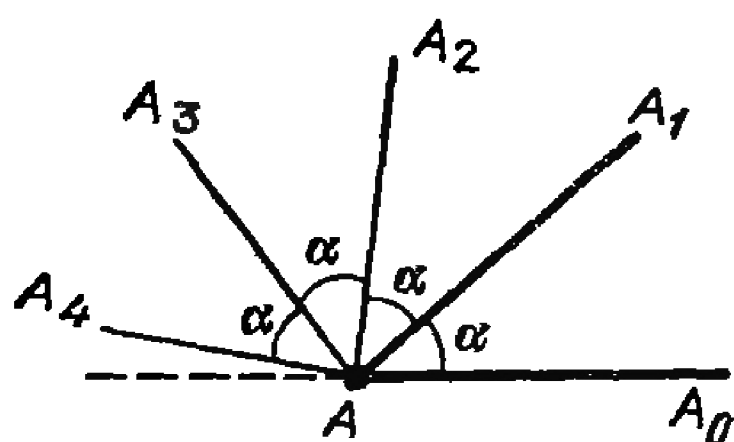


Рис. 15.3

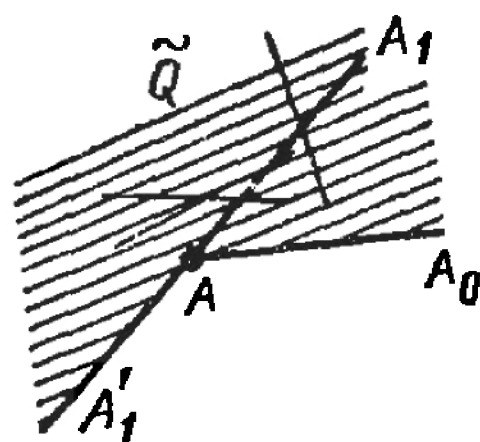


Рис. 15.4

но проводимыми в противоположном порядке, мы можем построить по лучу  $MP_1$  бильярдную траекторию  $MP_1P_2\dots$  внутри угла  $Q_1$ . Из сказанного выше вытекает, что указанным образом получается л ю б а я бильярдная траектория  $MP_1P_2\dots$ , первая точка излома которой лежит на луче  $AA_1$ . Точкам пересечения луча  $MP_1$  с лучами  $AA_1, AA_2, \dots$ , делящими плоскость на углы  $Q_1, Q_2, \dots$ , при обратных отражениях соответствуют точки соударения  $P_1, P_2, \dots$  траектории со сторонами угла  $Q_1$ . Очевидно, всевозможные лучи  $MP_1$  (при различных положениях точек  $M$  внутри  $Q_1$  и точек  $P_1$  на луче  $AA_1$ ) заполняют заштрихованную на рис. 15.4 область  $\tilde{Q}$  между лучом  $AA_0$  и лучом  $AA_1'$  — продолжением луча  $AA_1$  за точку  $A$ . В этой области  $\tilde{Q}$  с помощью отражений можно поместить лишь к о н е ч н о е число  $N_0$  рассматриваемых углов  $Q_1, Q_2, \dots$  — так как все эти углы равны по величине  $\alpha$ , а угол  $\tilde{Q}$  (большой развернутого) измеряется величиной  $\pi + \alpha$ , то  $N_0\alpha \leq \pi + \alpha$ , откуда  $N_0 \leq (\pi/\alpha) + 1$ . Иначе говоря, число углов  $Q_1, Q_2, \dots$ , помещающихся *внутри*  $\tilde{Q}$ , равно

$$N_0 = \left[ \frac{\pi}{\alpha} \right] + 1;$$

здесь  $[u]$  — обозначение для целой части числа  $u$  (наибольшего целого числа, не превосходящего  $u$ ). Если сторона  $AA_{N_0}$  последнего из этих углов  $Q_{N_0} = A_{N_0-1}AA_{N_0}$  не совпадает с лучом  $AA'$ , то луч  $MP_1$  может проходить еще по

одному углу — углу  $Q_{N_0+1}$ , получающемуся из  $Q_{N_0}$  отражением относительно луча  $AA_{N_0}$ , однако луч  $MP_1$  уже не может пересечь луч  $AA_{N_0+1}$ , ибо этот луч лежит вне области  $\tilde{Q}$ . В этом случае ( $AA_{N_0} \neq AA'_1$ ) луч  $MP_1$  может пересечь самое большее  $N_0$  лучей —  $AA_1, AA_2, \dots, AA_{N_0}$ . Это означает, что число  $N$  соударений бильярдной траектории со сторонами угла не превосходит  $N_0$ :

$$N \leq N_0 = \left[ \frac{\pi}{\alpha} \right] + 1.$$

Заметим, что  $N$  может принимать любое значение от 1 до  $N_0$  — это зависит от направления луча  $MP_1$ .

В случае, когда луч  $AA_{N_0}$  совпадает с лучом  $AA'_1$ , нет необходимости рассматривать еще один угол  $Q_{N_0+1}$ , ибо луч  $MP_1$  не может пересечь луча  $AA_{N_0}$ . Этот случай ( $AA_{N_0} = AA'_1$ ) соответствует тому, что  $\pi$  есть целое кратное числа  $\alpha$ , и максимальное число соударений тогда равно  $N_0 - 1$  (луч  $MP_1$  может пересекать лучи  $AA_1, AA_2, \dots, AA_{N_0-1}$ ).

Подведем итоги. Для числа  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi$ , положим

$$N(\alpha) = \begin{cases} N_0 = \left[ \frac{\pi}{\alpha} \right] + 1, & \text{если } \frac{\pi}{\alpha} \text{ не целое,} \\ N_0 - 1 = \left[ \frac{\pi}{\alpha} \right], & \text{если } \frac{\pi}{\alpha} \text{ целое.} \end{cases}$$

**Т е о р е м а.** При движении бильярдного шара внутри угла величины  $\alpha$  траектория шара имеет не более чем  $N(\alpha)$  точек соударения со сторонами угла, и после некоторого числа  $N \leq N(\alpha)$  соударений эта траектория уходит на бесконечность.

Нетрудно видеть, что введенное выше число  $N(\alpha)$  можно при любых  $\alpha$  записать одной формулой:

$$N(\alpha) = - \left[ - \frac{\pi}{\alpha} \right]$$

(проверьте это!).

**Б.** Доказанная в п. А теорема дает возможность найти максимальное число столкновений шаров масс  $m_1$  и  $m_2$ , движущихся по полупрямой  $x \geq 0$ , в точке  $x=0$  которой поставлена отражающая стенка (задача 14.2). Координаты  $x_1$  и  $x_2$  этих шаров удовлетворяют неравенствам  $0 \leq x_1 \leq x_2$ .

После введения координат  $\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1} x_1$  и  $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} x_2$ , как в § 14, мы можем свести систему этих шаров к движению конфигурационной точки  $\tilde{M} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$  внутри угла  $Q$  на плоско-

сти  $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$ , задаваемого неравенствами  $0 \leq \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} \leq \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}}$ ; точка  $\tilde{M}$  движется внутри этого угла ( $\angle AOB$  на рис. 15.5) по бильярдной траектории, а точкам соударения траектории со сторонами угла ( $OB$  или  $OA$ ) соответствуют столкновения исходных шаров (друг с другом или левого шара со стенкой в точке  $x=0$  соответственно). Прямая  $OB$  задается уравнением  $\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} = \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}}$ , и точка с координатами  $(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2})$  лежит на ней. Отсюда следует, что величина  $\alpha$  угла  $AOB$  равна

$$\alpha = \arctg \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}.$$

Таким образом, максимальное число столкновений рассматриваемых шаров равно

$$N(\alpha) = N\left(\arctg \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\right) = - \left\lfloor - \frac{\pi}{\arctg \sqrt{m_1/m_2}} \right\rfloor.$$

Тем самым решена задача 14.2: первый шар столкнется со вторым шаром и со стенкой не более чем  $N(\alpha)$  раз, после чего

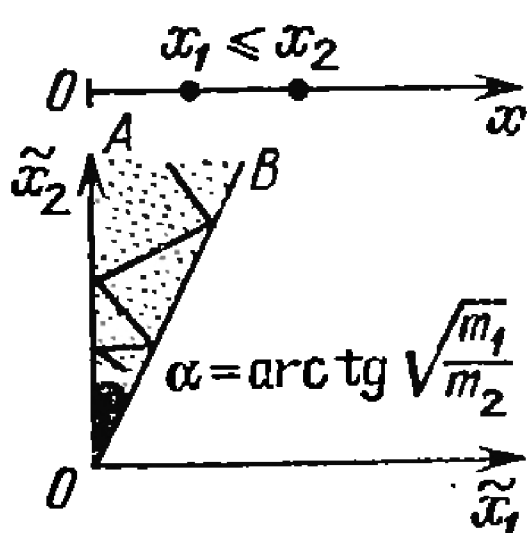


Рис. 15.5

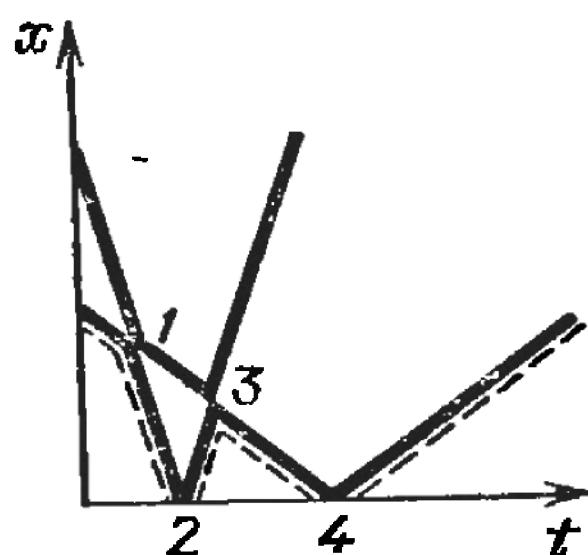


Рис. 15.6

шары разлетятся и больше столкновений не будет. В частности, получаем следующее.

1) Если  $m_1 = m_2$ , то  $\alpha = \arctg 1 = \pi/4$  и

$$N(\alpha) = - \left\lfloor - \frac{\pi}{\pi/4} \right\rfloor = -[-4] = 4;$$

ответ этот можно получить и из соображений обмена скоростями при упругих соударениях шаров масс  $m_1 = m_2$ . Картинка столкновений (рис. 15.6) на плоскости  $Otx_1$  выглядит в данном случае, как на рис. 13.3,б (столкновения пронумерованы цифрами 1, 2, 3, 4).



2) Если  $m_1$  много меньше  $m_2$ , то  $\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$  и  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$  «довольно малые» числа. Из формулы для  $N(\alpha)$  следует, что число столкновений в этом случае «довольно велико», как и следовало ожидать: легкий шарик  $m_1$  «мечется» между стенкой и тяжелым шариком  $m_2$  достаточно долго, прежде чем «отпихнет» (но «отпихнет» обязательно!) шарик  $m_2$  от стенки.

В. Приложим теперь доказанную в п. А теорему к задаче о числе отражений луча света в зеркале, имеющем

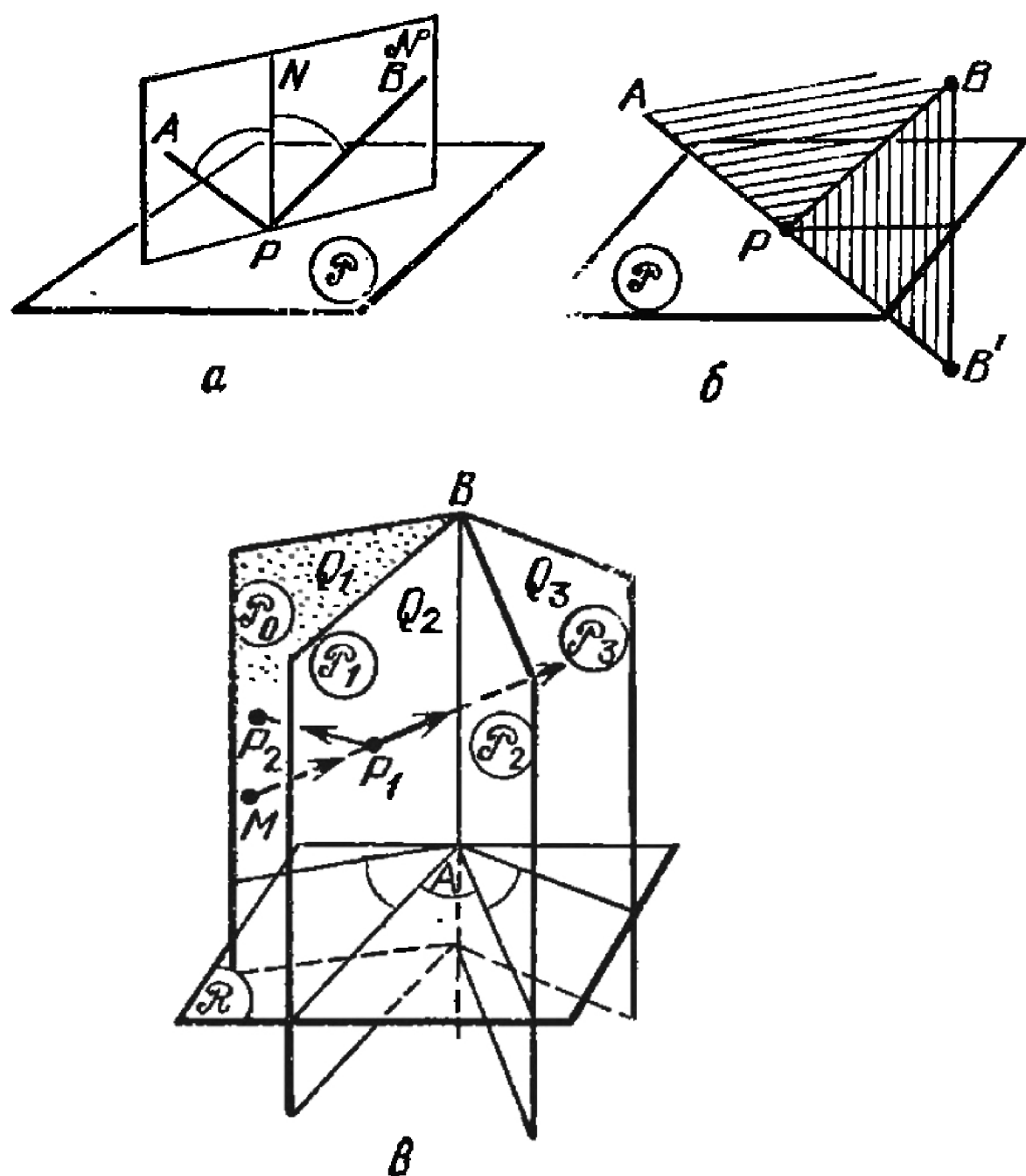


Рис. 15.7

форму бесконечного двугранного угла величины  $\alpha$  (задача 14.4а). Прежде всего следует точно сформулировать закон отражения луча света от плоского зеркала — или закон отражения летающего в пространстве точечного бильярдного шара от плоскости  $\mathcal{P}$  (уместнее было бы говорить о шарике для игры в пинг-понг). Пусть ломаная  $APB$  — это траектория луча света (или шарика), отражающаяся от плоскости  $\mathcal{P}$  в точке  $P$ . Известный из физики закон отражения гласит: лучи  $PA$  и  $PB$  и перпендикуляр  $PN$  к плоскости  $\mathcal{P}$  в точке  $P$  лежат в одной плоскости  $\mathcal{N}$ , причем лучи  $PA$  и  $PB$  образуют с лучом  $PN$  одинаковые углы

(рис. 15.7, а). Отсюда следует, что при отражении относительно плоскости  $\mathcal{P}$  луч  $PB$  переходит в луч  $PB'$ , являющийся продолжением луча  $AP$  за точку  $P$  (рис. 15.7, б). Таким образом, к траектории луча света внутри зеркала, имеющего форму бесконечного двугранного угла  $Q_1$  с гранями  $\mathcal{P}_0$  и  $\mathcal{P}_1$  и ребром  $AB$  (рис. 15.7, в), можно применить процедуру отражения в гранях этого угла, аналогичную описанной в п. А; при этом последовательными отражениями можно выпрямить траекторию  $MP_1P_2\dots$  — превратить ее в луч  $MP_1$ , который пересекает двугранные углы  $Q_2, Q_3, \dots$ , получающиеся из  $Q_1$  последовательными отражениями в гранях угла. Точки пересечения луча  $MP_1$  с полуплоскостями  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots$  соответствуют точкам отражения луча света от граней  $\mathcal{P}_0$  и  $\mathcal{P}_1$  исходного угла. Если рассмотреть плоскость  $\mathcal{R}$ , перпендикулярную общему ребру  $AB$  всех двугранных углов  $Q_1, Q_2, \dots$ , и луч  $MP_1$  спроектировать на эту плоскость в луч  $M'P'_1$ , то, рассматривая точки пересечения луча  $M'P'_1$  с лучами  $AA_1, AA_2, \dots$ , получающимися в пересечении плоскости  $\mathcal{R}$  с полуплоскостями  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots$ , как и при доказательстве теоремы п. А, получим: *максимальное число отражений луча света в гранях зеркала, имеющего форму двугранного угла величины  $\alpha$ , равно  $N(\alpha) = -[-\pi/\alpha]$* . Задача решена. Другой путь к ее решению вытекает из утверждения следующей задачи.

**Задача.** Доказать, что если угол  $APB$  в пространстве  $\mathbb{R}^3$  спроектировать на плоскость  $\mathcal{R}$ , параллельную биссектрисе  $PL$  этого угла, то проекция  $P'L'$  биссектрисы на эту плоскость  $\mathcal{R}$  является биссектрисой проекции  $A'P'B'$  рассматриваемого угла. Вывести отсюда, что проекция траектории луча света внутри зеркала, имеющего форму двугранного угла  $Q$  с ребром  $AB$ , на плоскость  $\mathcal{R}$ , перпендикулярную  $AB$ , является бильярдной траекторией внутри плоского угла  $A_0AA_1$ , получающегося в сечении двугранного угла  $Q$  плоскостью  $\mathcal{R}$ .

Теперь мы полностью готовы к исследованию одномерного «газа» из трех и большего числа молекул.

## Глава 6

### ОДНОМЕРНЫЙ «ГАЗ»

### ИЗ БОЛЬШОГО ЧИСЛА МОЛЕКУЛ

В этой главе мы последовательно перейдем от двух к трем и большему числу молекул одномерного «газа». При этом мы исследуем сначала систему  $n$  шаров (упругих частиц) произвольной массы на прямой. В § 16 мы получим точную оценку числа столкновений трех шаров на прямой, зависящую только от соотношений между их массами (но не зависящую от их начальных положений и скоростей); затем ответим на вопрос о том, может ли в системе из  $n$  упругих шаров на прямой произойти *бесконечно много столкновений* (в § 17 даются два разных подхода к ответу на этот вопрос — аналитический и изящный геометрический); наконец, в § 18 ответ § 17 подкрепляется *равномерной* (т. е. не зависящей от начальных условий) оценкой числа столкновений в системе из  $n$  упругих шаров на прямой и с ее помощью оценивается рост числа столкновений  $n$  молекул «газа» в одномерном сосуде — на отрезке прямой.

#### § 16. Три упругих шара на прямой

Рассмотрим систему трех шаров масс  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , движущихся по оси  $Ox$ . Предположим, что шары точечные, сталкиваются друг с другом абсолютно упруго, причем происходят только *попарные* столкновения: левого шарика ( $m_1$ ) со средним ( $m_2$ ) и среднего — с правым ( $m_3$ ).

*Всегда ли в такой системе происходит конечное число столкновений на всем бесконечном промежутке времени, или же существуют такие начальные условия (положения, скорости и массы шаров в момент  $t=0$ ), что число столкновений бесконечно?*

Нетривиальность этого вопроса наглядно демонстрируется на таком примере. Пусть два очень больших «сталь-

ных» шара движутся с очень малыми скоростями навстречу друг другу, а между ними летает с очень большой скоростью очень легкий пинг-понговый шарик, отскакивая от стальных шаров как от стенок со все возрастающей скоростью по мере приближения этих шаров друг к другу. Совершенно неясно, «растолкает» ли легкий пинг-понговый шарик массивные шары, а если даже и растолкает, то не может ли он до этого момента (заметьте, на к о н е ч н о м промежутке времени!), увеличивая частоту своих колебаний и скорость, уже столкнуться с ними бесконечно много раз? Мы докажем в этом параграфе, что *такого не происходит*: число столкновений между тремя шарами на прямой всегда конечно и зависит только от соотношений их масс (но не зависит от их начальных положений и скоростей). Точная оценка этого числа приводится в формулируемой в конце параграфа теореме.

Координаты трех шаров обозначим  $x_1, x_2, x_3$  и будем отмечать положение шаров конфигурационной точкой  $M = (x_1, x_2, x_3)$  трехмерного пространства  $\mathbb{R}^3$  с системой координат  $Ox_1x_2x_3$ .

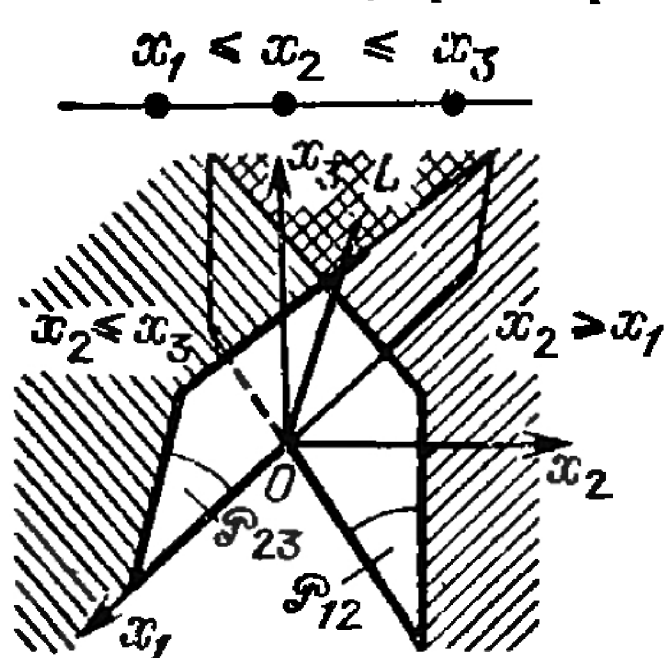


Рис. 16.1

Всевозможные положения конфигурационной точки  $M$  подчиняются неравенствам  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ . Первое из них,  $x_1 \leq x_2$ , задает в пространстве  $Ox_1x_2x_3$  полупространство, лежащее по одну сторону от плоскости  $\mathcal{P}_{1,2}$ , заданной уравнением  $x_1 = x_2$ ; второе,  $x_2 \leq x_3$ , задает полупространство, ограниченное плоскостью  $\mathcal{P}_{2,3}$  с уравнением  $x_2 = x_3$ . Оба неравенства вместе задают пересече-

ние этих полупространств — один из двугранных углов  $Q$ , образованный плоскостями  $\mathcal{P}_{1,2}$  и  $\mathcal{P}_{2,3}$  (рис. 16.1). Ребро этого двугранного угла — прямая  $OL$ , задаваемая равенствами  $x_1 = x_2 = x_3$ . Положению конфигурационной точки  $M = (x_1, x_2, x_3)$  на гранях  $Q$  — плоскостях  $\mathcal{P}_{1,2}$  и  $\mathcal{P}_{2,3}$  — соответствуют попарные столкновения между шариками  $x_1 = x_2$  и  $x_2 = x_3$ ; если же  $M$  лежит на ребре угла  $OL$ , то это соответствует т р о й н о м у столкновению шаров  $x_1 = x_2 = x_3$ , которое мы не будем рассматривать. При движении шаров по прямой  $Ox$  в течение промежутка времени от столкновения до столкновения скорости шаров  $v_1, v_2, v_3$  сохраняются; это означает, что при соответствующем движении точки  $M = (x_1, x_2, x_3)$  в конфигурационном пространстве  $Ox_1x_2x_3$  эта точка  $M$  движется с постоянной конфи-

гурационной скоростью  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  по некоторой прямой. После столкновения  $M$  отскакивает от соответствующей грани угла  $Q$  с новой скоростью  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ; составляющие новой скорости  $u_1, u_2, u_3$  вычисляются из соответствующих законов сохранения. Например, при столкновении шаров  $m_1$  и  $m_2$  (при отскакивании  $M$  от плоскости  $\mathcal{P}_{1,2}$ )  $u_3 = v_3$ , а скорости  $u_1$  и  $u_2$  определяются законами сохранения (1), (2) из § 13. Вообще говоря, этот закон отскакивания вовсе не есть закон упругого отражения точки  $M$  от соответствующей плоскости. Напомним, что при упругом отражении точки  $M$ , налетающей со скоростью  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  на плоскость  $\mathcal{P}$ , скорость  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$  точки  $M$  после отражения определяется следующими условиями:

(А) длины векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  равны:  $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$ ;

(Б) если  $\mathbf{n}$  — вектор, перпендикулярный плоскости  $\mathcal{P}$ , то векторы  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{n}$  компланарны, т. е. лежат в одной плоскости;

(В) углы, образуемые векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$  с вектором  $\mathbf{n}$ , равны (но  $\mathbf{w} \neq \mathbf{v}$ ); это условие удобно записать с помощью скалярного произведения:

$$(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = -(\mathbf{v}, \mathbf{n}).$$

**З а м е ч а н и е**, относящееся к элементарной геометрии. Если плоскость  $\mathcal{P}$  в пространстве  $Ox_1x_2x_3$  задается уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c,$$

то это уравнение можно переписать с помощью скалярного произведения в виде

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = c,$$

где  $\mathbf{a}$  — вектор с координатами  $(a_1, a_2, a_3)$ , а  $\mathbf{x}$  — вектор с началом в начале координат  $O = (0, 0, 0)$  и концом в точке  $M$  с координатами  $(x_1, x_2, x_3)$ . Вспоминая геометрический смысл скалярного произведения (см. начало § 14), запишем наше уравнение в виде

$$|\mathbf{a}| \cdot P_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = c,$$

где  $P_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$  — численная величина проекции вектора  $\mathbf{x}$  на направление вектора  $\mathbf{a}$ . Таким образом, плоскость  $\mathcal{P}$ , заданная уравнением  $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = c \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$  состоит из тех и только тех точек  $M$ , для которых численная величина проекции вектора  $\overrightarrow{OM}$  на вектор  $\mathbf{a}$  равна данной величине,

$$P_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \frac{c}{|\mathbf{a}|}.$$

Отсюда ясно, что плоскость  $\mathcal{P}$  перпендикулярна вектору  $\mathbf{a}$ . Таким образом, в качестве вектора  $\mathbf{n}$ , перпендикулярного к плоскости  $\mathcal{P}$ , заданной уравнением  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$ , можно взять вектор  $\mathbf{n} = \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ .

Введем вместо  $x_1, x_2, x_3$  другие координаты  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ , аналогичные рассмотренным в § 14, так, чтобы движение новой изображающей точки  $\tilde{M} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$  подчинялось закону упругого отражения при соударениях с плоскостями отражений  $\tilde{\mathcal{P}}_{1,2}$  и  $\tilde{\mathcal{P}}_{2,3}$  в пространстве  $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ . Именно, положим

$$\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1} x_1, \quad \tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} x_2, \quad \tilde{x}_3 = \sqrt{m_3} x_3.$$

Движение точки  $\tilde{M} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$  происходит в двугранном угле  $\tilde{Q}$ , задаваемом неравенствами

$$\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} \leq \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} \leq \frac{\tilde{x}_3}{\sqrt{m_3}}.$$

Этот угол ограничен плоскостями столкновений  $\tilde{\mathcal{P}}_{1,2}$  и  $\tilde{\mathcal{P}}_{2,3}$ , заданными соответственно уравнениями

$$\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} = \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}}, \quad \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} = \frac{\tilde{x}_3}{\sqrt{m_3}};$$

ребро его — прямая  $O\tilde{L}$ , заданная уравнением

$$\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} = \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} = \frac{\tilde{x}_3}{\sqrt{m_3}}.$$

Скорость  $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$  изображающей точки  $\tilde{M}$  по-прежнему не меняется в промежуток времени между столкновениями и связана со скоростью  $v = (v_1, v_2, v_3)$  формулами

$$\tilde{v}_1 = \sqrt{m_1} v_1, \quad \tilde{v}_2 = \sqrt{m_2} v_2, \quad \tilde{v}_3 = \sqrt{m_3} v_3.$$

Докажем, что соударение изображающей точки  $\tilde{M}$  с плоскостями столкновений  $\tilde{\mathcal{P}}_{1,2}$  и  $\tilde{\mathcal{P}}_{2,3}$  (отвечающее попарным столкновениям шаров  $m_1, m_2, m_3$ ) происходит по закону упругого отражения, т. е. скорости  $\tilde{v}$  и  $\tilde{u}$  до и после соударения удовлетворяют условиям (А), (Б), (В), сформулированным выше. Доказательство этого такое же, как и в § 14.

Рассмотрим, например, соударение точки  $\tilde{M}$  с плоскостью столкновения  $\tilde{\mathcal{P}}_{1,2}$ . В старых координатах  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  скорости  $v$  и  $u$  до и после столкновения связаны соотношениями

$$\begin{aligned} u_3 &= v_3, \\ m_1 u_1 + m_2 u_2 &= m_1 v_1 + m_2 v_2, \\ m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 &= m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2. \end{aligned}$$

Перейдем в этих уравнениях к величинам  $\tilde{v}_k = \sqrt{m_k} v_k$  и  $\tilde{u}_k =$



$=\sqrt{m_k} u_k$ . Получим

$$\tilde{u}_3 = \tilde{v}_3, \quad (1)$$

$$\sqrt{m_1} \tilde{u}_1 + \sqrt{m_2} \tilde{u}_2 = \sqrt{m_1} \tilde{v}_1 + \sqrt{m_2} \tilde{v}_2, \quad (2)$$

$$\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 = \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2. \quad (3)$$

Возводя обе части равенства (1) в квадрат и складывая с равенством (3), получим

$$\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2 = \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_3^2,$$

откуда следует, что  $|\tilde{u}| = |\tilde{v}|$ . Тем самым условие (А) проверено.

Чтобы проверить условие (Б), т. е. компланарность векторов  $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$ ,  $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$  и вектора  $n$ , перпендикулярного плоскости столкновения  $\mathcal{P}_{1,2}$ , достаточно представить  $n$  в виде  $\lambda_1 \tilde{v} + \lambda_2 \tilde{u}$  (тогда  $n$  лежит в плоскости векторов  $\tilde{v}, \tilde{u}$ ). Так как уравнение плоскости  $\mathcal{P}_{1,2}$  имеет вид

$$\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} = \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{m_1}} \tilde{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{m_2}} \tilde{x}_2 + 0 \cdot \tilde{x}_3 = 0,$$

то согласно замечанию, сделанному выше, в качестве вектора  $n$  можно взять вектор

$$n = \left( \frac{1}{\sqrt{m_1}}, -\frac{1}{\sqrt{m_2}}, 0 \right).$$

Вычтем из вектора  $\tilde{v}$  вектор  $\tilde{u}$ ; так как  $\tilde{v}_3 = \tilde{u}_3$ , мы получим вектор

$$\tilde{v} - \tilde{u} = (\tilde{v}_1 - \tilde{u}_1, \tilde{v}_2 - \tilde{u}_2, 0).$$

Перепишем уравнение (2) в виде

$$\sqrt{m_1} (\tilde{v}_1 - \tilde{u}_1) = -\sqrt{m_2} (\tilde{v}_2 - \tilde{u}_2) = \lambda, \quad (2')$$

где  $\lambda$  — число, которому равны обе части этого равенства. Отсюда

$$\tilde{v}_1 - \tilde{u}_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{m_1}}, \quad \tilde{v}_2 - \tilde{u}_2 = -\frac{\lambda}{\sqrt{m_2}}.$$

Сравнивая теперь формулы для  $n$  и для  $\tilde{v} - \tilde{u}$ , получаем

$$\tilde{v} - \tilde{u} = \lambda n,$$

откуда  $n = \frac{1}{\lambda} \tilde{v} - \frac{1}{\lambda} \tilde{u}$ . Таким образом, вектор  $n$  выражен через

$\tilde{v}$  и  $\tilde{u}$  в явном виде, и условие (Б), таким образом, доказано.

Наконец, проверим, что и условие (В), т. е. соотношение

$$(\tilde{u}, n) = -(\tilde{v}, n) \quad (4)$$

тоже выполнено. Запишем обе части доказываемого соотношения

$$(4) \text{ в координатах, учитывая, что } n = \left( \frac{1}{\sqrt{m_1}}, -\frac{1}{\sqrt{m_2}}, 0 \right),$$

$$\frac{\tilde{u}_1}{\sqrt{m_1}} - \frac{\tilde{u}_2}{\sqrt{m_2}} = -\left( \frac{\tilde{v}_1}{\sqrt{m_1}} - \frac{\tilde{v}_2}{\sqrt{m_2}} \right),$$

т. е.

$$\frac{\tilde{u}_1 + \tilde{v}_1}{\sqrt{m_1}} = \frac{\tilde{u}_2 + \tilde{v}_2}{\sqrt{m_2}}. \quad (4')$$

Чтобы доказать (4'), перепишем (2) и (3) в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{m_1} (\tilde{v}_1 - \tilde{u}_1) &= \sqrt{m_2} (\tilde{u}_2 - \tilde{v}_2), \\ \tilde{v}_1^2 - \tilde{u}_1^2 &= \tilde{u}_2^2 - \tilde{v}_2^2. \end{aligned}$$

Разделив почленно последнее равенство на предпоследнее, получим требуемое соотношение (4'). Закон упругого столкновения выполнен.

Итак, система трех шаров масс  $m_1, m_2, m_3$  на оси  $Ox$  сводится к бильярду внутри двугранного угла  $\tilde{Q}$ . Чтобы

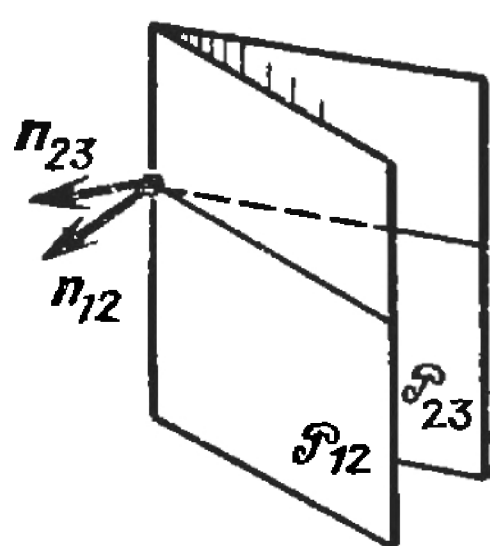


Рис. 16.2

найти максимальное возможное число столкновений между шарами до их разлета, достаточно знать величину  $\alpha$  двугранного угла  $\tilde{Q}$ , выраженную через массы  $m_1, m_2, m_3$ . Найдем ее.

Угол между гранями двугранного угла равен углу между векторами, перпендикулярными граням этого угла и соответственно направленными (рис. 16.2; поясните это). В данном случае грани угла — плоскости  $\tilde{P}_{1,2}$  и  $\tilde{P}_{1,3}$ , а нужным образом направленные векторы, перпендикулярные к этим плоскостям — это

$$\mathbf{n}_{12} = \left( \frac{1}{\sqrt{m_1}}, -\frac{1}{\sqrt{m_2}}, 0 \right) \text{ и } \mathbf{n}_{23} = \left( 0, -\frac{1}{\sqrt{m_2}}, \frac{1}{\sqrt{m_3}} \right)$$

(см. геометрическое замечание). Рассмотрим скалярное произведение этих векторов; если  $\alpha$  — угол между векторами, то мы имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{n}_{12}| \cdot |\mathbf{n}_{23}| \cos \alpha &= (\mathbf{n}_{12}, \mathbf{n}_{23}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{m_1}} \cdot 0 + \left( -\frac{1}{\sqrt{m_2}} \right) \left( -\frac{1}{\sqrt{m_2}} \right) + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{m_3}} = \frac{1}{m_2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$|\mathbf{n}_{12}| = \sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}, \quad |\mathbf{n}_{23}| = \sqrt{\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}},$$

находим

$$\cos \alpha = \frac{1/m_2}{\sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \sqrt{\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}}} = \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}}.$$

Итак,

$$\alpha = \arccos \sqrt{m_1 m_3 / [(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)]}.$$

Учитывая результаты, полученные в § 15, получаем следующее утверждение.

**Т е о р е м а.** *Каковы бы ни были начальные положения и скорости трех шаров масс  $m_1, m_2, m_3$  на прямой, эти шары разлетятся после не более чем  $N(m_1, m_2, m_3)$  попарных столкновений (и будут затем двигаться уже без столкновений); здесь*

$$N(m_1, m_2, m_3) = - \left\lceil - \frac{\pi}{\arccos \sqrt{m_1 m_3 / [(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)]}} \right\rceil. \quad (5)$$

Заметьте, что из «чисто физических» соображений получить такую оценку было бы весьма трудно (напомним, что оценка **т о ч н а я** — может быть **р ó в н о**  $N(m_1, m_2, m_3)$  столкновений!). Более того, вовсе не очевидно, что шары разлетятся после некоторого числа столкновений! (Заметим, что при  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  эта оценка дает  $N(m) = - \left\lceil - \frac{\pi}{\arccos(1/2)} \right\rceil = 3$ , что равно  $C_3^2$ , как и должно быть для трех шаров равных масс.)

Только что решенную задачу о числе столкновений трех шаров можно поставить и в случае  $n$  шаров на прямой с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Однако уже при  $n=4$  придется рассматривать изображающую точку  $M = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  в четырехмерном конфигурационном пространстве  $\mathbb{R}^4$ . Конечно, при определенных навыках и некоторой смелости можно разобраться и с бильярдом в четырехмерном пространстве. Мы, прежде чем читатель перейдет к § 17, оставим ему этот случай в качестве задачи; укажем только, что задачу о числе столкновений **ч е т ы р е х** шаров различной массы можно свести к задаче о числе отражений луча света, попавшего в зеркало, имеющее форму трехгранного угла (в обычном трехмерном пространстве; см. задачу 14.46)). Последняя задача и сама по себе весьма сложна; она будет решена также в § 17. Что касается  $n > 4$  шаров, то можно пойти и по другому пути, указанному в § 17 и 18.

## § 17. $n$ упругих шаров на прямой

Для  $n > 3$  шаров с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , движущихся по оси  $Ox$ , так же как и для трех шаров, можно ввести конфигурационное пространство —  $(n-1)$ -гран-  
ный угол  $Q$  в  $n$ -мерном координатном пространстве  $\mathbb{R}^n =$

$= O x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ , выделяемый неравенствами

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$$

(каждое неравенство  $x_k \leq x_{k+1}$  задает полупространство в  $\mathbb{R}^n$ ).

Все рассуждения предыдущего параграфа, сводящие систему из  $n$  шаров к бильярду в  $(n-1)$ -гранном угле

$$\tilde{Q} = \left\{ \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} \leq \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} \leq \dots \leq \frac{\tilde{x}_n}{\sqrt{m_n}} \right\},$$

где  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$  — новые координаты в конфигурационном пространстве  $\mathbb{R}^n$ , связанные со старыми координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  равенствами

$$\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1} x_1, \tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} x_2, \dots, \tilde{x}_n = \sqrt{m_n} x_n,$$

переносятся дословно и на этот общий случай, но поскольку при  $n > 3$  число  $n-1$  больше 2, задача уже не сводится к плоскому случаю — отражения бильярдной конфигурационной точки  $\tilde{M}$  происходят не в двугранном угле, т. е. происходят не от двух, а от большего числа стенок. С многогранным (даже трехгранным) углом все становится гораздо сложнее уже в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Поэтому мы временно отойдем от такого рассмотрения, сводящего всю задачу к многомерной геометрии, и попробуем применить аналитические методы при исследовании системы из  $n$  молекул на прямой. В конце параграфа мы вновь вернемся к конфигурационному пространству и предложим читателю красивое геометрическое решение.

Сформулируем еще раз задачу о «газе» молекул на прямой, решаемую в этом параграфе \*).

*Для  $n$  шаров на прямой с массами  $m_1, \dots, m_n$ , начальными положениями  $x_1, \dots, x_n$  и скоростями  $v_1, \dots, v_n$  выяснить, всегда ли конечно число столкновений между ними на бесконечном промежутке времени, считая все происходящие столкновения парными и упругими (т. е. подчиняющимися законам сохранения импульса и энергии; см. формулы (1) и (2) § 13).*

В случае шаров равных масс,  $m_1 = \dots = m_n$ , ответ на этот вопрос утвердительный: полное его решение приведено в задаче 13.3. Максимальное число столкновений между

---

\*) Впервые эту задачу (и даже более общую — о вылете бильярдной частицы из многогранного угла) чисто геометрически решил Я. Г. Синай (см. [7]); аналитическое решение предложили независимо А. Авдеев и первый из авторов этой книги.

шарами в этом случае равно числу пар шаров  $C_n^2 = n(n-1)/2$  и связано это, напомним, с тем, что при столкновении двух одинаковых шаров они просто обмениваются скоростями, или, говоря иначе, один шар как бы проходит сквозь другой, поменявшись с ним на ходу номерами (поэтому-то каждый шар может «пройти сквозь другой» лишь не более  $n-1$  раз).

Для  $n > 3$  шаров произвольных масс ответ на поставленный вопрос также утвердительный, хотя получить верхнюю оценку числа  $N$  столкновений между ними существенно труднее, чем для шаров равных масс или для трех шаров разных масс. Эту оценку мы получим в § 18, а сейчас приведем самое короткое из известных нам *аналитических* решений задачи.

#### А. Аналитическое решение.

**Т е о р е м а 1.** *Число столкновений в системе из  $n$  упругих шаров на прямой конечно на бесконечном промежутке времени.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о** будем вести индукцией по числу шаров. В § 16 было доказано, что при  $n = 3$  число столкновений конечно.

**Д о п у с т и м** (это будет предположением индукции), что при любых начальных условиях в группе из любого числа  $k < n$  шаров за время от 0 до  $T$  (где  $T$  может быть равно  $+\infty$ ) происходит только конечное число столкновений. **Д о к а ж е м**, что конечным будет и число столкновений в системе из  $k = n$  шаров (шаг индукции).

Доказательство поведем от противного. Предположим, что при каких-то начальных условиях  $n$  шаров за время от 0 до  $T$  сталкиваются бесконечно много раз, и получим противоречие.

1°. Перенумеруем шары в порядке их следования по оси  $x$ , но справа налево (рис. 17.1). В каждый

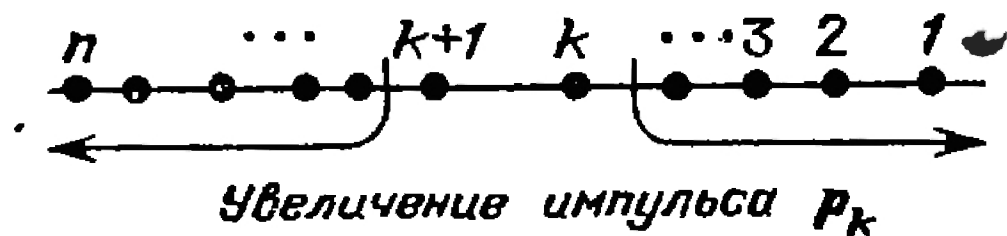


Рис. 17.1

момент времени будем рассматривать суммарный импульс  $k$  правых шаров:

$$p_k = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_k v_k,$$

где  $k$  принимает все значения от 1 до  $n$ . Докажем, что при

каждом парном столкновении импульс  $p_k$  может только увеличиться.

Действительно,  $p_k$  не меняется, если сталкиваются шары левее  $(k+1)$ -го или правее  $k$ -го — в первом случае шары с номерами  $k+2, \dots, n$  никак не влияют на сумму  $m_1 v_1 + \dots + m_k v_k$ , а во втором не меняется скорость  $v_k$  и суммарный импульс  $p_{k-1} = m_1 v_1 + \dots + m_{k-1} v_{k-1}$  (рис. 17.1). Если же  $k$ -й шар сталкивается с  $(k+1)$ -м, то  $p_k$  увеличивается, ибо  $(k+1)$ -й шар толкает  $k$ -й вправо, увеличивая скорость  $v_k$ , а тем самым и сумму  $m_1 v_1 + \dots + m_k v_k$ .

Занумеруем теперь подряд натуральными числами  $1, 2, \dots, s, \dots$  все происходящие столкновения в системе шаров. Пусть  $v_i^{(s)}$  — скорость  $i$ -го шара после  $s$ -го по порядку столкновения в системе (в котором  $i$ -й шар мог и не участвовать), а  $p_k^{(s)}$  — импульс  $p_k$  после  $s$ -го столкновения. Из сказанного выше следует, что для каждого  $k = 1, 2, \dots, n$  последовательность  $\{p_k^{(s)}\}$  не убывающая, т. е.

$$p_k^{(1)} \leq p_k^{(2)} \leq \dots \leq p_k^{(s)} \leq \dots$$

С другой стороны, при всех столкновениях суммарная кинетическая энергия всех  $n$  шаров сохраняется:

$$\frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \dots + m_n v_n^2) = E = \text{const.}$$

Отсюда следует, что скорость каждого шара  $i$  в каждый момент времени ограничена сверху:

$$m_i v_i \leq 2E \quad \text{и} \quad |v_i| \leq \sqrt{\frac{2E}{m_i}} \leq \sqrt{\frac{2E}{m_{\min}}},$$

где  $m_{\min}$  — наименьшая из масс  $m_1, \dots, m_n$ . А тогда для любого  $k$  и любого  $s$  получаем

$$p_k^{(s)} \leq m_1 |v_1^{(s)}| + \dots + m_k |v_k^{(s)}| \leq (m_1 + \dots + m_k) \sqrt{\frac{2E}{m_{\min}}},$$

т. е. после каждого столкновения двух шаров исходной системы суммарный импульс правой  $k$ -точечной системы шаров с номерами  $1, 2, \dots, k$  ограничен сверху числом  $(m_1 + \dots + m_k) \sqrt{2E/m_{\min}}$ .

Итак, при каждом  $k = 1, 2, \dots, n$  последовательность  $\{p_k^{(s)}\}$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , является монотонной и ограниченной. Поэтому, согласно теореме Вейерштрасса \*), все последовательности  $\{p_1^{(s)}\}$ ,  $\{p_2^{(s)}\}$ ,  $\dots$ ,  $\{p_n^{(s)}\}$  имеют пределы при

\*) Которая утверждает, что ограниченная монотонная (возрастающая или убывающая) последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел при  $n \rightarrow \infty$ .



$s \rightarrow \infty$ . Но  $p_1^{(s)} = m_1 v_1^{(s)}$ , следовательно, существует предел  $\lim_{s \rightarrow \infty} v_1^{(s)} = w_1$ .

Далее,  $p_2^{(s)} = m_1 v_1^{(s)} + m_2 v_2^{(s)}$ , поэтому существует и предел  $\lim_{s \rightarrow \infty} v_2^{(s)} = w_2$  (объясните подробно, почему). Точно так же,

из равенства  $p_3^{(s)} = m_1 v_1^{(s)} + m_2 v_2^{(s)} + m_3 v_3^{(s)}$  и существования пределов  $\lim_{s \rightarrow \infty} p_3^{(s)}$ ,  $\lim_{s \rightarrow \infty} v_1^{(s)} = w_1$ ,  $\lim_{s \rightarrow \infty} v_2^{(s)} = w_2$  следует существование предела  $\lim_{s \rightarrow \infty} v_3^{(s)} = w_3$ . Продолжая это рассуж-

дение, выводим существование пределов скоростей в с е х шаров \*):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} v_k^{(s)} = w_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

2°. Теперь мы покажем, что все предельные скорости  $w_k$  равны между собой:  $w_1 = w_2 = \dots = w_n = w$ .

Рассмотрим два соседних шара:  $k$ -й и  $(k+1)$ -й. За время от 0 до  $T$ , в течение которого по нашему предположению в системе из  $n$  шаров произошло б е с к о н е ч н о е число столкновений,  $k$ -й и  $(k+1)$ -й шары также должны были столкнуться б е с к о н е ч н о много раз.

Действительно, если бы они столкнулись лишь к о н е ч н о е число раз, то с некоторого момента  $t_0$ , где  $0 < t_0 < T$ , они перестали бы сталкиваться и тогда вся система из  $n$  шаров с момента  $t_0$  разделилась бы на две: п р а в у ю, в которую входят шары с номерами от 1 до  $k$ , и л е в у ю — с номерами от  $k+1$  до  $n$ . В каждой из этих систем число шаров строго меньше  $n$ , а тогда по предположению индукции число столкновений в каждой из них конечно как на промежутке времени от 0 до  $t_0$ , так и на промежутке времени от  $t_0$  до  $T$ . В результате получаем, что и во всей системе из  $n$  шаров число столкновений на промежутке времени  $(0, T)$  к о н е ч н о, что противоречит нашему исходному предположению.

Рассмотрим некоторое столкновение между шарами  $k$  и  $k+1$ ; пусть оно имеет номер  $s$  в серии всех столкновений системы из  $n$  шаров. Из закона сохранения импульса имеем равенство

$$m_k v_k^{(s)} + m_{k+1} v_{k+1}^{(s)} = m_k v_k^{(s-1)} + m_{k+1} v_{k+1}^{(s-1)}$$

\*) Л. Н. Васерштейн и Г. А. Гальперин доказали общее утверждение о том, что в любой (даже многомерной) системе из конечного числа центрально отталкивающихся частиц все частицы имеют предельные скорости. Это утверждение используется при доказательстве теоремы в гл. 7.

(при этом  $(s-1)$ -е столкновение может произойти и между шарами, отличными от  $k$  и  $k+1$ ), а из закона сохранения энергии — равенство

$$m_k (v_k^{(s)})^2 + m_{k+1} (v_{k+1}^{(s)})^2 = m_k (v_k^{(s-1)})^2 + m_{k+1} (v_{k+1}^{(s-1)})^2.$$

Переносами слагаемых в разные части равенств получаем

$$\begin{aligned} m_k (v_k^{(s)} - v_k^{(s-1)}) &= m_{k+1} (v_{k+1}^{(s-1)} - v_{k+1}^{(s)}), \\ m_k ((v_k^{(s)})^2 - (v_k^{(s-1)})^2) &= m_{k+1} ((v_{k+1}^{(s-1)})^2 - (v_{k+1}^{(s)})^2), \end{aligned}$$

и после почленного деления последнего равенства на предпоследнее (такое деление возможно:  $v_k^{(s)} \neq v_k^{(s-1)}$  и  $v_{k+1}^{(s)} \neq v_{k+1}^{(s-1)}$ , поскольку  $s$ -й удар произошел именно между  $k$ -м и  $(k+1)$ -м шаром!) получаем соотношение

$$v_k^{(s)} + v_k^{(s-1)} = v_{k+1}^{(s-1)} + v_{k+1}^{(s)}.$$

Оно справедливо для бесконечного числа столкновений  $s$  между  $k$ -м и  $(k+1)$ -м шаром, поэтому в нем можно перейти к пределу при  $s \rightarrow \infty$ . Для предельных скоростей получим  $2\omega_k = 2\omega_{k+1}$ , откуда  $\omega_k = \omega_{k+1}$ . Итак, *все предельные скорости равны между собой*:

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n = \omega,$$

что мы и хотели доказать в этом пункте.

3°. Пусть  $v_1^{(0)}, \dots, v_n^{(0)}$  — начальные скорости шаров; из закона сохранения импульса следует, что для каждого столкновения  $s$  выполнено равенство

$$m_1 v_1^{(0)} + \dots + m_n v_n^{(0)} = m_1 v_1^{(s)} + \dots + m_n v_n^{(s)}.$$

Поэтому, переходя к пределу при  $s \rightarrow \infty$ , находим

$$m_1 v_1^{(0)} + \dots + m_n v_n^{(0)} = (m_1 + \dots + m_n) \omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{m_1 v_1^{(0)} + \dots + m_n v_n^{(0)}}{m_1 + \dots + m_n}.$$

Но величина справа — скорость центра масс всей системы из  $n$  шаров. Итак, *скорость каждого шара стремится к скорости центра масс всей системы* (если число соударений бесконечно).

Перейдем в связи с этим в систему центра масс, т. е. в систему отсчета координат, которая движется относительно исходной системы отсчета равномерно со скоростью  $\omega$ . В ней все предельные скорости равны 0; следовательно, и предельная энергия в системе центра масс

равна 0. Однако в силу инерциальности системы отсчета, связанной с центром масс, в ней, как и в исходной системе, выполнен закон сохранения энергии; а раз предельная энергия равна 0, то и начальная энергия шаров в системе центра масс также равна 0.

Это может быть лишь тогда, когда *все начальные скорости шаров в системе центра масс были равны 0*, т. е. когда в исходной системе отсчета все начальные скорости шаров были равны  $w$ .

Но при одинаковых начальных скоростях шаров столкновений между ними *вообще не может происходить*! Это противоречит исходному предположению о том, что в системе происходит бесконечно много столкновений.

Следовательно, исходное предположение неверно — число столкновений может быть только конечным, что и требовалось доказать.

Повторим кратко схему доказательства нашего утверждения. Мы предположили, что в *любой* системе с *меньшим* чем  $n$  числом шаров количество столкновений конечно (а для  $n=3$  это предположение мы доказали в § 16), и предположили затем, что в *некоторой* системе из  $n$  шаров количество столкновений *бесконечно*. Отсюда мы вывели, что любые два соседних шара должны сталкиваться друг с другом также бесконечно много раз, а тогда их скорости должны *стремиться* к одному и тому же пределу, равному скорости центра масс системы. Но, поскольку выполнен закон сохранения энергии, эти скорости уже с *начального момента* равнялись скорости центра масс. Однако шары с равными скоростями вообще не могут сталкиваться! Итак, если предположить бесконечность количества ударов в «газе» из  $n$  молекул, то из этого выводится, что это количество равно нулю — явный абсурд! Поэтому число ударов и в системе из  $n$  шаров конечно на всем бесконечном интервале времени. Это число мы оценим явно в § 18.

**Б. Геометрическое решение \*).** К рассмотренному красивому аналитическому рассуждению добавим теперь геометрическое, пожалуй еще более красивое и прозрачное рассуждение, использующее, как мы обещали в начале параграфа, конфигурационное пространство — многогранный угол  $\tilde{Q}$ . Заодно обобщим ситуацию и сформулируем следующую задачу.

---

\*) Это решение существенно отличается от впервые предложенного Я. Г. Свинаем решения в статье [7]. Оно было получено независимо А. М. Степиным и первым из авторов этой книги.

В многомерном пространстве расположен произвольный  $n$ -гранный угол  $\tilde{Q}$  с вершиной в начале координат  $O$ . Внутри этого многогранного угла движется бильярдная частица, отражаясь упруго (по бильярдному закону) от его граней. Перестанет ли когда-нибудь бильярдная частица сталкиваться с гранями угла  $\tilde{Q}$ ? Конечно или бесконечно число ее отражений от граней за бесконечное время?

Для двугранного угла величиной  $\alpha$  ответ мы знаем: искомое число отражений конечно и не превосходит  $N(\alpha) = \lfloor \pi/\alpha \rfloor$  (см. § 15, п. В). Число  $N(\alpha)$  было получено с помощью выпрямления траектории — превращения ее в прямую. Так же, но несколько хитрее, мы поступим и сейчас.

**Т е о р е м а 2.** Бильярдная частица в многогранном угле  $\tilde{Q}$  с некоторого момента движется по лучу, не пересекающему его граней. До этого момента частица сделает не более  $N(\tilde{Q})$  отражений от граней  $\tilde{Q}$ , причем число  $N(\tilde{Q})$  зависит только от геометрических характеристик угла  $\tilde{Q}$ , но не от начального положения и направления скорости частицы.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для наглядности докажем теорему 2 в случае многогранного угла в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — двугранные углы многогранного угла  $\tilde{Q}$ . Опишем сферу  $S^2$  радиуса 1 с центром в вершине  $O$  угла  $\tilde{Q}$ . Тогда  $n$ -гранный угол  $\tilde{Q}$  высечет на сфере  $S^2$  сферический многоугольник  $\mathcal{A} = A_1 A_2 \dots A_n$ , вершины которого  $A_i$  — точки пересечения ребер угла  $\tilde{Q}$  со сферой, а стороны  $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$  — дуги больших окружностей, высекаемые на сфере его гранями (рис. 17.2, а). Длины сторон  $A_i A_{i+1}$  многоугольника равны плоским углам  $A_i O A_{i+1}$  (так как радиус сферы равен 1), а углы  $A_1, \dots, A_n$  многоугольника  $\mathcal{A}$  — двугранным углам  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  многогранного угла  $\tilde{Q}$ .

Рассмотрим теперь бильярдную траекторию внутри  $\tilde{Q}$ . Она представляет собой многозвенную ломаную, не обязательно лежащую в одной плоскости, число изломов которой нам неизвестно — оно может быть как конечным, так и бесконечным (пока мы ничего не знаем), а также может либо содержать бесконечный луч (тогда бильярдная частица, летящая по нему, уже не сталкивается со стенками многогранного угла  $\tilde{Q}$ ), либо не содержать такого бесконечного луча (в этом случае множество соударений со стенками

заведомо бесконечно; но и в первом случае число соударений может быть априори бесконечным — только звенья траектории в этом случае становятся сколь угодно малыми, и частица как бы «застревает» в угле  $\tilde{Q}$ ).

Применим к бильярдной траектории уже использовавшуюся ранее процедуру «выпрямления», состоящую в том, что мы каждый раз производим симметричное отражение угла  $\tilde{Q}$  и бильярдной траектории относительно очередной

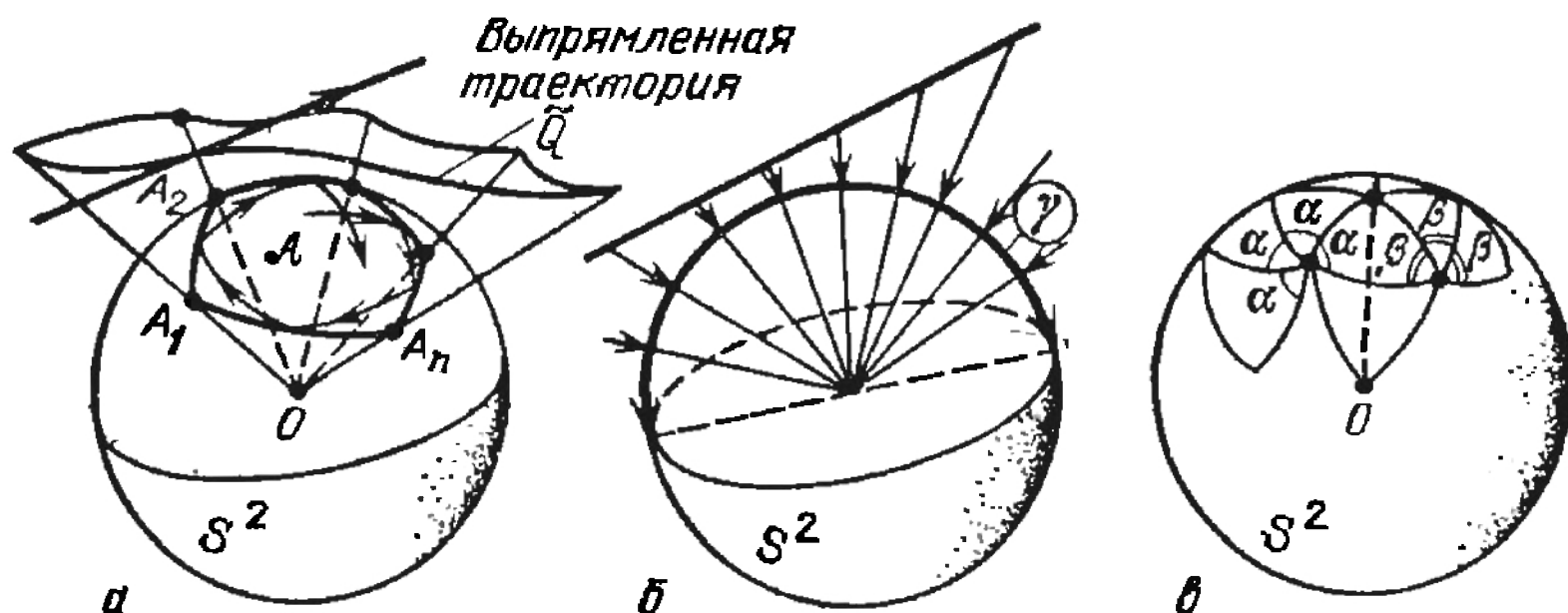


Рис. 17.2

его грани, от которой отражается частица (подробнее о процедуре выпрямления см. во введении и в пп. А и В § 15). В результате таких отражений (которых может быть и бесконечно много, по неизвестному пока числу точек излома траектории) получим последовательность многогранных углов  $\tilde{Q}, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3, \dots$ , каждые два из которых симметричны друг другу относительно общей грани, и прямую  $l$ , пересекающую эти многогранные углы, — *выпрямленную бильярдную траекторию*. Многогранные углы  $\{\tilde{Q}_i\}$  высекают на сфере  $S^2$  равные сферические многоугольники, имеющие общие стороны, — все они получаются симметричными отражениями на сфере из многоугольника  $A = A_1A_2 \dots A_n$ .

Рассмотрим центральную проекцию бильярдной траектории в угле  $\tilde{Q}$  на сферу с центром  $O$ . На сфере получится многозвенная ломаная, расположенная в сферическом многоугольнике  $A$  и состоящая из дуг больших окружностей сферы  $S^2$ . Звенья этой ломаной отражаются от сторон сферического многоугольника  $A_1 \dots A_n$  по закону «угол падения равен углу отражения». Действительно, пусть отражение происходит, например, от стороны  $A_1A_2$ , т. е. проекция бильярдной частицы на сферу  $S^2$  движется по звеньям  $M_1M_2$  и  $M_2M_3$ , где точка  $M_2$  лежит на стороне  $A_1A_2$

(рис. 17.3). Следовательно, сама частица отражается от грани  $OA_1A_2$  многогранного угла  $\tilde{Q}$ . Отобразив  $\tilde{Q}$  симметрично относительно этой грани (переведя его в многогранный угол  $\tilde{Q}_1$ ) мы «выпрямим» два соседних звена бильярдной траектории — проекция на сферу отрезка, симметричного второму звену траектории, будет дугой  $M_2M'_3$ , являющейся продолжением дуги  $M_1M_2$ . Следовательно,  $\angle A_1M_2M_1 = \angle A_2M_2M'_3$ , а так как  $\angle A_2M_2M'_3 = \angle A_2M_2M_3$ , то  $\angle A_1M_2M_1 = \angle A_2M_2M_3$  — звенья  $M_1M_2$  и  $M_2M_3$  наклонены к стороне  $A_1A_2$  под равными углами, что и требовалось.

Итак, проекция на сферу бильярдной траектории в угле  $\tilde{Q}$  является бильярдной траекторией в сферическом многоугольнике  $\mathcal{A}$ . После выпрямления бильярдной траектории в  $\tilde{Q}$ , что в проекции на сферу отвечает выпрямлению

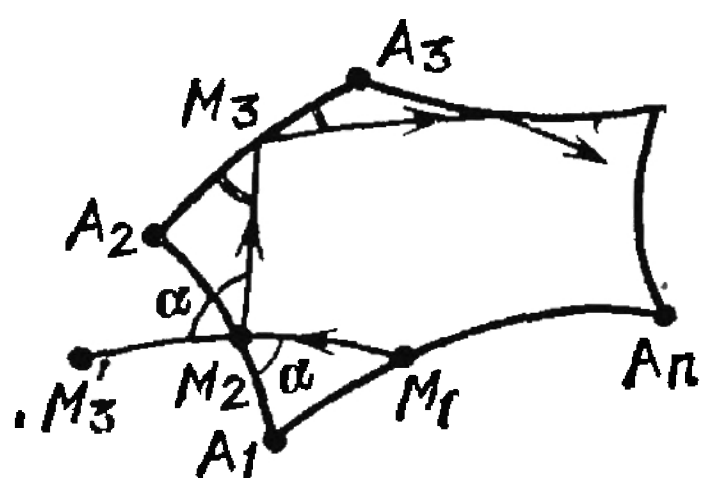


Рис. 17.3

бильярдной траектории в сферическом многоугольнике  $\mathcal{A}$ , получим, как уже говорилось, прямую  $l$  и ее центральную проекцию на сферу с центром  $O$  — дугу  $\gamma$ . Но дуга  $\gamma$  — это в точности половина большой окружности! Это хорошо видно из рис. 17.2, б (концы дуги  $\gamma$  не включаются в нее). Следовательно, длина дуги

$\gamma$  равна  $\pi$ , и, тем самым, бильярдная кривая в угле  $\tilde{Q}$  (имеющая бесконечную длину) превращается в ломаную внутри многоугольника  $\mathcal{A}$  конечной длины  $\pi$  (начало и конец этой ломаной могут лежать строго внутри  $\mathcal{A}$ ).

Еще раз внимательно исследуем звенья бильярдной ломаной в многоугольнике  $\mathcal{A}$ . Проекция  $M$  бильярдной частицы движется по сферической ломаной внутри многоугольника  $\mathcal{A}$  и проходит суммарный путь длины  $\pi$ . Если точка  $M$  движется по тем звеньям сферической ломаной, которые отражаются от двух соседних сторон многоугольника  $\mathcal{A}$ , например от сторон  $A_{i-1}A_i$  и  $A_iA_{i+1}$ , то она отражается от этих сторон (не являющихся сторонами угла  $A_i$  многоугольника  $\mathcal{A}$ ) не более  $N(\alpha_i) = -[-\pi/\alpha_i]$  раз (таково число отражений бильярдной частицы от двугранного угла с ребром  $OA_i$  и гранями  $OA_{i-1}A_i$  и  $OA_iA_{i+1}$ ; см. также рис. 17.2, в). Но не может ли возникнуть такая ситуация: точка  $M$  попадает в угол  $A_i$  бесконечно много раз, причем каждый раз все ближе



и ближе к вершине  $A_i$  — это не будет противоречить конечности суммарной длины всех проходимых ею звеньев внутри  $\mathcal{A}$ !

Чтобы отвергнуть такую возможность, поступим следующим образом: окружим каждую вершину  $A_i$  кружком  $K_i$  фиксированного радиуса так, чтобы кружки не пересекались, а оставшуюся часть многоугольника  $\mathcal{A}$  (за исключением всех этих кружков) обозначим  $\mathcal{B}$  (рис. 17.4). Пусть  $d$  — минимальное расстояние между точками сторон  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ , принадлежащих части  $\mathcal{B}$  многоугольника (т. е. между точками

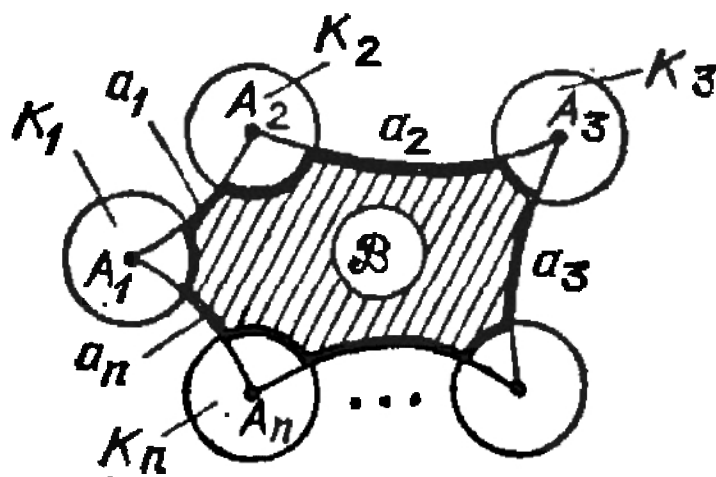


Рис. 17.4

сторонами  $a_1, \dots, a_n$ , не лежащими в кружках  $\{K_i\}$ ). Тогда точка  $M$ , выйдя из кружка  $K_i$ , вновь попадет в этот кружок, лишь пройдя расстояние, не меньшее  $d$ . Сколько же раз точка  $M$  может попасть в кружок  $K_i$ ? Вне этого кружка она проходит путь, меньший суммарного пути по всем звеньям, т. е. меньший  $\pi$ ; значит, количество ее заходов в кружок  $K_i$  не может превосходить  $m = [\pi/d] + 1$ . Внутри же каждого кружка  $K_i$  точка  $M$  сталкивается только со сторонами угла  $A_i$  и испытывает, по сказанному выше, не более  $N(\alpha_i)$  столкновений. Всего столкновений точки  $M$  со сторонами многоугольника  $\mathcal{A}$  внутри всех кружков поэтому не более  $m(N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + \dots + N(\alpha_n))$ . К этому числу следует добавить количество столкновений точки  $M$  с частями сторон  $a_1, \dots, a_n$  многоугольника  $\mathcal{A}$ , лежащими вне кружков  $\{K_i\}$ . Но от одного такого столкновения до другого точка  $M$  проходит путь, не меньший  $d$ , поэтому число этих столкновений не больше указанного выше числа  $m$ . Следовательно, общее число столкновений точки  $M$  со сторонами многоугольника  $\mathcal{A}$ , равное числу столкновений бильярдной частицы с гранями угла  $\tilde{Q}$ , не превосходит

$$N \leq N(\tilde{Q}) = m(N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + \dots + N(\alpha_n) + 1) = \\ = \left( \left[ \frac{\pi}{d} \right] + 1 \right) \left( 1 - \left[ -\frac{\pi}{\alpha_1} \right] - \left[ -\frac{\pi}{\alpha_2} \right] - \dots - \left[ -\frac{\pi}{\alpha_n} \right] \right),$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — двугранные углы многогранного угла  $\tilde{Q}$ .

Мы, таким образом, не только доказали, что число  $N$  столкновений частицы с гранями угла  $\tilde{Q}$  в трехмерном пространстве конечно, но и оценили его числом  $N(\tilde{Q})$ , завися-

щим только от геометрии многогранного угла  $\tilde{Q}$  — от его плоских углов (они неявно входят в величину  $d$ ) и двугранных углов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Аналогичное рассуждение, по существу индукционное, проводится и для многогранного угла  $\tilde{Q}$  в  $k$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^k$  ( $k > 3$ ). Случай трехмерного пространства  $\mathbb{R}^3$  мы свели к случаю двумерного, но уже сферического пространства  $S^2$  (правда, с ограниченным многоугольником, а не с бесконечным углом); точно так же, случай четырехмерного пространства  $\mathbb{R}^4$  сводится к рассмотрению «сферического» многогранника на трехмерной единичной сфере  $S^3 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ , и т. д. В результате получается равномерная (т. е. зависящая только от геометрии угла  $\tilde{Q}$ ) оценка числа ударов с гранями.

Остановимся коротко на доказательстве для общего случая  $k$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^k$ , в котором находится  $k$ -мерный  $n$ -гранный угол  $\tilde{Q}^k$  с вершиной в начале координат  $O$ , и сведем его к случаю размерности  $k-1$ . Опишем единичную  $(k-1)$ -мерную сферу  $S^{k-1}$  с центром в  $O$ ; грани угла  $\tilde{Q}^k$  высекут на сфере  $S^{k-1}$  некоторый сферический

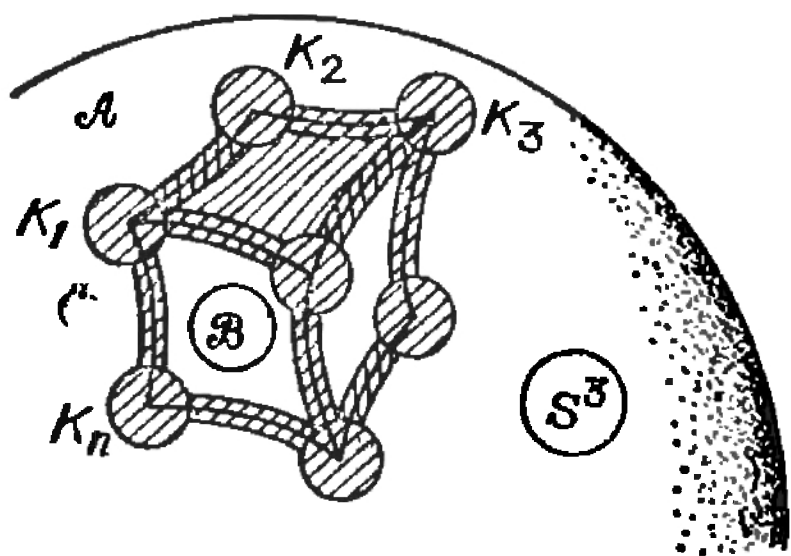


Рис. 17.5

$(k-1)$ -мерный многогранник  $\mathcal{A}$ . Бильярдная траектория вместе с бильярдной частицей проектируется на сферу  $S^{k-1}$  в виде «сферической бильярдной ломаной» в  $\mathcal{A}$ , по которой движется точка  $M$ . После выпрямления бильярдной траектории получаем прямую  $l$ , центральная проекция которой на сферу  $S^{k-1}$  дает половину дуги большой окружности

длины  $\pi$  (рис. 17.2, б). Следовательно, сумма длин звеньев сферической бильярдной ломаной в сферическом многограннике  $\mathcal{A}$  равна  $\pi$ . Точки пересечения ребер многогранного угла  $\tilde{Q}$  со сферой  $S^{k-1}$  — вершины  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — окружим непересекающимися шарами  $K_1, \dots, K_n$  размерности  $k-1$ ; двумерные, трехмерные,  $\dots$ ,  $(k-2)$ -мерные грани многогранника  $\mathcal{A}$  окружим попарно непересекающимися окрестностями —  $(k-1)$ -мерными цилиндрами (схематически это изображено на рис. 17.5). Внутри каждого шара  $K_i$  точка  $M$  отражается только от  $(k-2)$ -мерных граней  $(k-1)$ -мерных многогранных углов  $\tilde{Q}_1^{k-1}, \tilde{Q}_2^{k-1}, \dots$

...,  $\tilde{Q}_n^{k-1}$ ; поэтому число столкновений точки  $M$  с этими гранями не превосходит некоторой константы, зависящей, по предположению индукции, только от геометрии углов  $\tilde{Q}_1^{k-1}, \dots, \tilde{Q}_n^{k-1}$ . Аналогичные равномерные оценки имеют место и для отражений точки  $M$  от граней сферического многогранника  $\mathcal{A}$ , находящихся внутри построенных цилиндров. Как и в случае пространства  $\mathbb{R}^3$  и сферы  $S^2$ , в случае пространства  $\mathbb{R}^k$  и сферы  $S^{k-1}$  мы должны учесть количество заходов точки  $M$  в построенные шары и цилиндры; по аналогичным соображениям, они не превосходят некоторого числа  $m = [\pi/d] + 1$ , где  $d$  — геометрическая характеристика оставшейся после выкидывания шаров и цилиндров из многогранника  $\mathcal{A}$  части  $\mathcal{B}$ . В результате можно получить равномерную оценку числа столкновений точки  $M$  с гранями сферического многогранника  $\mathcal{A}$ , которая оценивает сверху также и число столкновений исходной бильярдной частицы. Теорема 2, таким образом, доказана.

Заодно получено второе решение задачи про  $n$  шаров на прямой; для этого в качестве многогранного угла  $\tilde{Q}$  следует брать  $(n-1)$ -гранный угол  $\tilde{Q} = \left\{ (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} \leq \dots \leq \frac{\tilde{x}_n}{\sqrt{m_n}} \right\}$ . В отличие от приведенного аналитического решения, где утверждается лишь, что число столкновений между шарами не может быть бесконечным, в геометрическом решении получен гораздо более сильный результат, говорящий о наличии единой (равномерной) оценки числа столкновений для всех систем шаров с данными массами.

**Теорема 3.** Число столкновений за бесконечный промежуток времени между  $n$  шарами на прямой меньше некоторой константы  $N(m_1, \dots, m_n)$ , зависящей только от соотношений масс этих шаров  $m_1, \dots, m_n$  (эти соотношения определяются геометрией многогранного угла  $\tilde{Q}(m_1, \dots, m_n)$ , т. е. плоскими, двугранными, трехгранными, ..., углами  $\tilde{Q}$ ) и не зависящей от начальных положений  $x_1, \dots, x_n$  и скоростей  $v_1, \dots, v_n$  шаров.

Исходя из некоторых других, более физических соображений, получим оценку константы  $N(m_1, \dots, m_n)$  в § 18.

**Задача\*.** В прямой круговой конус влетает бильярдная частица. а) Перестанет ли она когда-нибудь сталкиваться с ним? б) Конечно ли число ее столкновений с поверхностью конуса?

в) Если да, то зависит ли это число от начальных положения и скорости частицы?

О т в е т. а) Перестанет. б) Конечно. в) Зависит. У к а з а н и е к р е ш е н и ю. Рассмотрим центральную проекцию бильярдной траектории  $\gamma$  на сферу с центром в вершине конуса. Вся спроектированная траектория  $\gamma'$  будет располагаться в круглой «шапочке», высекаемой на сфере конусом, причем ломаная  $\gamma'$  будет вести себя в «шапочке», как бильярд в обычном круге, т. е. будет располагаться полностью в круговом кольце и иметь равные звенья. Рассуждая, как и раньше, нетрудно показать, что длина ломаной  $\gamma'$  равна  $\pi$ , поэтому число звеньев у  $\gamma'$ , а тем самым и у  $\gamma$  конечно. Но чем «касательнее» частица будет запущена в конус, тем звенья ломаной  $\gamma'$  будут меньше, и поэтому их количество будет зависеть от начального состояния влетающей частицы.

### § 18\*. Число столкновений между молекулами одномерного «газа»

В этом параграфе мы сначала оценим число столкновений между  $n$  молекулами «газа» на прямой, а затем решим аналогичную задачу в «сосуде» — на отрезке прямой. Геометрическое решение задачи о числе столкновений между  $n$  шарами с массами  $m_1, \dots, m_n$ , упруго сталкивающимися на прямой, дает возможность получить верхнюю оценку этого числа, но выписать ее явно на основе соображений § 17 довольно затруднительно. Мы приведем новые соображения, которые позволят получить искомую оценку аналитически и выписать ее явно. Эта оценка будет зависеть только от числа  $n$  шаров и от отношения максимальной массы  $m_{\max}$  в системе к минимальной массе  $m_{\min}$ . При ее выводе мы будем использовать полученные в § 17 знания о том, что число столкновений в рассматриваемой системе конечно на бесконечном промежутке времени (и некоторые следствия, например о том, что моменты столкновений  $t_1, t_2, \dots$  не могут скапливаться на оси времени, и т. д.). Будет доказана

**Т е о р е м а 1.** *Число столкновений в системе из  $n$  шаров на прямой с массами  $m_1, \dots, m_n$  не превосходит  $2 \left( 8n^2 (n-1) \frac{m_{\max}}{m_{\min}} \right)^{n-2}$ , где  $m_{\max}$  и  $m_{\min}$  — максимальная и минимальная масса шара.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о \*).** Перейдем к системе координат с началом в центре масс системы шаров. В этой

---

\*) Прежде чем читать доказательство, читателю полезно ознакомиться с принципом Лагранжа, которому посвящен «Рассказ двенадцатый» упоминавшейся в § 4 книги В. И. Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах». Впрочем, кратко этот принцип изложен нами на с. 180.

системе отсчета

$$m_1 x_1 + \dots + m_n x_n = 0, \quad m_1 v_1 + \dots + m_n v_n = 0.$$

Энергию всей системы молекул в рассматриваемой системе отсчета обозначим  $E$ :

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{v_i^2}{2} = E.$$

Занумеруем подряд моменты столкновений частиц:  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ . Согласно закону сохранения импульса в момент  $t_k$  импульс каждой из столкнувшихся частиц изменяется на одну и ту же положительную величину, которую обозначим  $\Delta p_k$  (мы считаем скорость частицы положительной при ее движении вправо по прямой и отрицательной при ее движении влево): импульс левой столкнувшейся частицы уменьшается на  $\Delta p_k > 0$ , а правой — увеличивается на  $\Delta p_k$  (см. задачу 13.1). Пусть  $p_i = m_i v_i$  — импульс частицы  $i$ , а  $N = N(m_1, \dots, m_n)$  — общее число столкновений в рассматриваемой системе шаров за бесконечный промежуток времени. Оценку числа  $N$  проведем в несколько этапов.

Этап 1. Оценим сумму  $\Delta p_1 + \Delta p_2 + \dots + \Delta p_N$ . Для этого умножим импульс каждого шара на его номер и сложим полученные величины, т. е. рассмотрим функцию времени  $t$

$$\mathcal{P}(t) = 1 \cdot p_1(t) + 2 \cdot p_2(t) + \dots + n \cdot p_n(t) = \sum_{i=1}^n i \cdot p_i(t).$$

Функция  $\mathcal{P}(t)$  постоянна между двумя столкновениями и меняется только в момент столкновения  $t_k$  на некоторую величину  $\Delta \mathcal{P}_k$ . Вычислим  $\Delta \mathcal{P}_k$ , считая, что в момент  $t_k$  столкнулись шары  $r$  и  $r+1$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t_k - 0) &= 1 \cdot p_1 + \dots + r \cdot p_r + (r+1) p_{r+1} + \dots + n \cdot p_n, \\ \mathcal{P}(t_k + 0) &= 1 \cdot p_1 + \dots + r (p_r - \Delta p_k) + (r+1) (p_{r+1} + \Delta p_k) + \dots \\ &\quad \dots + n \cdot p_n, \end{aligned}$$

$$\Delta \mathcal{P}_k = \mathcal{P}(t_k + 0) - \mathcal{P}(t_k - 0) = \Delta p_k.$$

Итак,  $\mathcal{P}(t)$  в момент удара  $t_k$  меняется на  $\Delta p_k$ . Если мы найдем верхнюю и нижнюю оценки  $\mathcal{P}_{\max}$  и  $\mathcal{P}_{\min}$  функции  $\mathcal{P}(t)$ , то мы тем самым сможем получить и верхнюю оценку для суммы  $\sum_k \Delta p_k$ , поскольку

$$\sum_{k=1}^N \Delta p_k \leq \mathcal{P}_{\max} - \mathcal{P}_{\min}.$$

Как будет следовать из дальнейшего, достаточно получить только верхнюю оценку  $\mathcal{P}_{\max}$  (мы увидим, что  $\mathcal{P}_{\min} = -\mathcal{P}_{\max}$ ).

Рассмотрим функцию \*)

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \left( i \cdot m_i v_i + \lambda \cdot m_i v_i + \mu \cdot m_i \frac{v_i^2}{2} \right) - \mu E,$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — неопределенные коэффициенты. В искомой экстремальной точке  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  все производные этой функции по переменным  $v_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , обращаются в нуль:

$$\mathcal{L}'_{v_i} = (i + \lambda) m_i + \mu m_i v_i = 0.$$

Отсюда получаем  $n$  равенств:

$$v_i = -\frac{i + \lambda}{\mu}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Подставив найденное значение  $v_i$  в равенство  $\sum_{i=1}^n m_i v_i = 0$ , найдем

$$\lambda = -\frac{\sum_{i=1}^n i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = -\frac{M_1}{M},$$

где  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  — суммарная масса всей системы шаров, а  $M_1 = \sum_{i=1}^n i \cdot m_i$  — первый момент (этот термин взят из теории вероятностей).

Подставив теперь  $v_i = -\frac{i + \lambda}{\mu}$  в равенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = E,$$

---

\*) Функция  $\mathcal{L}$  называется функцией Лагранжа (см. об этом уже упоминавшуюся книгу В. М. Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах»), а применяемый здесь метод носит название «правило множителей Лагранжа» и состоит в том, что, добавляя к оцениваемой функции  $\mathcal{P}(t)$  все имеющиеся ограничения, умноженные на неопределенные коэффициенты (в данном случае это

$\lambda \left( \sum_{i=1}^n m_i v_i \right)$  и  $\mu \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - E \right)$ , дифференцированием полученной функции  $\mathcal{L}$  находят экстремальные точки.



найдем

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{1}{2E} \cdot \sum_{i=1}^n m_i (i + \lambda)^2},$$

или, введя обозначение  $M_2 = \sum_{i=1}^n i^2 \cdot m_i$  (второй момент)

и подставляя найденное значение  $\lambda$ ,

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{1}{2E} \left( M_2 - \frac{M_1^2}{M} \right)}.$$

Зная  $\lambda$  и  $\mu$ , можно вычислить экстремальные значения функции  $\mathcal{P}(t)$ :

$$\mathcal{P}_{\text{extr}} = \sum_{i=1}^n i m_i v_i = \mp \sqrt{2E \left( M_2 - \frac{M_1^2}{M} \right)}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{P}_{\text{max}} = -\mathcal{P}_{\text{min}} = \sqrt{2E \left( M_2 - \frac{M_1^2}{M} \right)},$$

следовательно,

$$\sum_{k=1}^N \Delta p_k \leq \mathcal{P}_{\text{max}} - \mathcal{P}_{\text{min}} = 2\mathcal{P}_{\text{max}} = 2 \sqrt{2E \left( M_2 - \frac{M_1^2}{M} \right)}. \quad (1)$$

**З а м е ч а н и е.** Читатели, знакомые с теорией вероятностей, заметят, что число  $D\xi = \frac{M_2 - M_1^2/M}{M}$  есть дисперсия случайной величины  $\xi$ , принимающей значение  $i$  с вероятностью  $m_i/M$ . Поэтому выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \sqrt{M_2 M - M_1^2} &\leq M \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot n^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot n \right)^2} = \\ &= M \cdot \frac{n-1}{2}, \end{aligned}$$

которое превращается в равенство, если положить крайние массы  $m_1$  и  $m_n$  равными  $M/2$ , а все прочие массы — нулю (это неравенство можно доказать и чисто алгебраически).

**Этап 2.** Всю ось времени  $t$  разобьем на «быстрые промежутки», на каждом из которых какие-то два соседних шара имеют большую относительную скорость и не сталкиваются друг с другом. Напомним, что начало системы координат находится в центре масс системы  $n$  шаров.

Промежуток времени  $[t_1, t_2]$  (где  $t_2$  может, вообще говоря, принять значение  $+\infty$ , тогда отрезок превратится в

венства (для определенности считаем, например, что  $i < j$ ):

$$\begin{aligned}
 |v_i - v_j| &\leq |v_i - v_{i+1}| + |v_{i+1} - v_{i+2}| + \dots + |v_{j-1} - v_j| < \\
 &< c \left( \frac{m_i + m_{i+1}}{m_i m_{i+1}} + \dots + \frac{m_{j-1} + m_j}{m_{j-1} m_j} \right) = c \left[ \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_{i+1}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{m_{i+1}} + \frac{1}{m_{i+2}} \right) + \dots + \left( \frac{1}{m_{j-2}} + \frac{1}{m_{j-1}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{m_{j-1}} + \frac{1}{m_j} \right) \right] = c \left[ 2 \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_{i+1}} + \dots + \frac{1}{m_j} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{m_i} - \frac{1}{m_j} \right] < 2c \left( \frac{1}{m_i} + \dots + \frac{1}{m_j} \right).
 \end{aligned}$$

Так как начало координат находится в центре масс системы, то в каждый момент для каждого шара  $i$  существует шар  $j$  такой, что скорости  $v_i$  и  $v_j$  имеют противоположные направления, а тогда, учитывая (2),

$$\begin{aligned}
 |v_i| < |v_i - v_j| < 2c \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \right) &= \frac{2}{\left( \sum \frac{1}{m_i} \right)} \sqrt{\frac{E}{2M}} \left( \sum \frac{1}{m_i} \right) = \\
 &= \sqrt{\frac{2E}{M}}
 \end{aligned}$$

для всех  $i=1, 2, \dots, n$ .

Оценим кинетическую энергию всей системы шаров сверху:

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} < \sum_{i=1}^n \frac{m_i \frac{2E}{M}}{2} = \frac{E}{M} \sum_{i=1}^n m_i = E.$$

Полученное противоречивое неравенство  $E < E$  доказывает неправомочность сделанного нами предположения. Утверждение доказано.

Этап 3. Оценим количество быстрых промежутков. Каждому максимальному по длине быстрому промежутку  $[t_1, t_2]$  соответствует «сильный» удар некоторых шаров  $i-1$  и  $i$ , происходящий или в момент  $t_1$ , или в момент  $t_2$ , при этом для всех  $t \in [t_1, t_2]$

$$|v_i(t) - v_{i-1}(t)| \geq c \frac{m_{i-1} + m_i}{m_{i-1} m_i}.$$

Изменение импульса при этом ударе равно (см. задачу 13.1)

$$\Delta p_{i-1, i} = |v_i - v_{i-1}| \frac{m_{i-1} m_i}{m_{i-1} + m_i} \geq c.$$

С другой стороны,  $\Delta p_{i-1, i}$  равно какому-то  $\Delta p_k$ , где  $k$  — номер момента  $t_k$  в последовательности всех моментов

полуинтервал  $[t_1, +\infty)$ ) будем называть *быстрым*, если какие-то два соседних шара  $i-1$  и  $i$  ни разу не сталкиваются в течение этого промежутка, причем их относительная скорость превышает некоторую положительную постоянную  $c_i > 0$ :  $|v_i(t) - v_{i-1}(t)| \geq c_i$  при всех  $t \in [t_1, t_2]$ .

Конечно, любой промежуток времени, в течение которого в системе не было вообще столкновений, — быстрый (поскольку положительную константу  $c_i$  можно определить уже после выбора этого промежутка как модуль разности скоростей частиц  $i-1$  и  $i$ ). Это верно, но только в этом случае  $c_i$  будет зависеть от положений и скоростей шаров, а этого мы хотим избежать, чтобы получить оценку числа столкновений. Наша цель — сначала подобрать константы  $c_i$ , не зависящие от положений и скоростей шаров, а затем уже получить соответствующие быстрые промежутки. Заодно мы хотим, чтобы каждый момент времени  $t$  попадал хотя бы в один из таких быстрых промежутков.

**Утверждение.** Существует такой набор констант  $c_2, c_3, \dots, c_n$ , зависящих только от масс частиц и полной кинетической энергии  $E$ , что объединение быстрых промежутков времени по всем парам  $(i-1, i)$  покрывает всю ось времени.

**Доказательство.** Введем число

$$c = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}} \sqrt{\frac{E}{2M}}, \quad (2)$$

где  $M = m_1 + \dots + m_n$ . Положим теперь для каждого  $i=2, 3, 4, \dots$

$$c_i = c \frac{m_{i-1} + m_i}{m_{i-1}m_i}.$$

Утверждается, что для каждого момента времени  $t$  существует такое  $i$ , что  $|v_i(t) - v_{i-1}(t)| \geq c_i$  — это и означает, что все быстрые промежутки покрывают полностью ось времени.

Предположим, однако, противное: пусть в некоторый момент  $t$  для всех  $i=2, 3, \dots, n$

$$|v_i(t) - v_{i-1}(t)| < c \frac{m_{i-1} + m_i}{m_{i-1}m_i}.$$

С учетом этого предположения справедливы такие нера-

венства (для определенности считаем, например, что  $i < j$ ):

$$\begin{aligned} |v_i - v_j| &\leq |v_i - v_{i+1}| + |v_{i+1} - v_{i+2}| + \dots + |v_{j-1} - v_j| < \\ &< c \left( \frac{m_i + m_{i+1}}{m_i m_{i+1}} + \dots + \frac{m_{j-1} + m_j}{m_{j-1} m_j} \right) = c \left[ \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_{i+1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{m_{i+1}} + \frac{1}{m_{i+2}} \right) + \dots + \left( \frac{1}{m_{j-2}} + \frac{1}{m_{j-1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{m_{j-1}} + \frac{1}{m_j} \right) \right] = c \left[ 2 \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_{i+1}} + \dots + \frac{1}{m_j} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{m_i} - \frac{1}{m_j} \right] < 2c \left( \frac{1}{m_i} + \dots + \frac{1}{m_j} \right). \end{aligned}$$

Так как начало координат находится в центре масс системы, то в каждый момент для каждого шара  $i$  существует шар  $j$  такой, что скорости  $v_i$  и  $v_j$  имеют противоположные направления, а тогда, учитывая (2),

$$\begin{aligned} |v_i| < |v_i - v_j| < 2c \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \right) &= \frac{2}{\left( \sum \frac{1}{m_i} \right)} \sqrt{\frac{E}{2M}} \left( \sum \frac{1}{m_i} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2E}{M}} \end{aligned}$$

для всех  $i=1, 2, \dots, n$ .

Оценим кинетическую энергию всей системы шаров сверху:

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} < \sum_{i=1}^n \frac{m_i \frac{2E}{M}}{2} = \frac{E}{M} \sum_{i=1}^n m_i = E.$$

Полученное противоречивое неравенство  $E < E$  доказывает неправомерность сделанного нами предположения. Утверждение доказано.

Этап 3. Оценим количество быстрых промежутков. Каждому максимальному по длине быстрому промежутку  $[t_1, t_2]$  соответствует «сильный» удар некоторых шаров  $i-1$  и  $i$ , происходящий или в момент  $t_1$ , или в момент  $t_2$ , при этом для всех  $t \in [t_1, t_2]$

$$|v_i(t) - v_{i-1}(t)| \geq c \frac{m_{i-1} + m_i}{m_{i-1} m_i}.$$

Изменение импульса при этом ударе равно (см. задачу 13.1)

$$\Delta p_{i-1, i} = |v_i - v_{i-1}| \frac{m_{i-1} m_i}{m_{i-1} + m_i} \geq c.$$

С другой стороны,  $\Delta p_{i-1, i}$  равно какому-то  $\Delta p_k$ , где  $k$  — номер момента  $t_k$  в последовательности всех моментов

столкновений шаров, и поэтому изменение импульса при каждом сильном ударе не меньше  $c$ :  $\Delta p_k \geq c$ . Следовательно, количество сильных ударов не больше чем  $\left( \sum_{k=1}^N \Delta p_k \right) / c$ . Оценим это число, учитывая формулы (1) и (2):

$$\frac{\sum_{k=1}^N \Delta p_k}{c} \leq \frac{2 \sqrt{2E \left( M_2 - \frac{M_1^2}{M} \right)}}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \right)^{-1} \sqrt{\frac{E}{2M}}} = 4 \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \right) \sqrt{M_2 M - M_1^2}.$$

Осталось теперь заметить, что каждый момент сильного удара — конец отрезка  $[t_1, t_2]$  — принадлежит не более чем двум быстрым промежуткам, стало быть, число быстрых промежутков не больше удвоенного числа сильных ударов, т. е. не превосходит величины

$$K = 8 \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \right) \sqrt{M_2 M - M_1^2}. \quad (3)$$

Этап 4. Оценим число столкновений  $N(m_1, \dots, m_n)$ . Итак, существует разбиение оси времени, состоящее не более чем из  $K$  отрезков, причем на каждом отрезке (быстром промежутке) всю систему шаров можно считать разбитой на две невзаимодействующие системы. Поэтому можно воспользоваться индукцией и написать:

$$N(m_1, \dots, m_n) \leq K \cdot \max_{1 \leq r \leq n} (N(m_1, \dots, m_r) + \\ + N(m_{r+1}, \dots, m_n)) + \text{число сильных ударов},$$

где  $N(m_1, \dots, m_r)$  — число столкновений в системе  $r$  шаров с массами  $m_1, \dots, m_r$ . Мы будем далее делать грубые оценки, заменяя, например,  $K/2$  на  $K$  и т. п. — нас интересует лишь возможность получить явную формулу для оценки.

Так как число сильных ударов не больше  $K$  (даже не больше  $K/2$ ), то

$$N(m_1, \dots, m_n) \leq K \cdot \max_{1 \leq r \leq n} (N(m_1, \dots, m_r) + \\ + N(m_{r+1}, \dots, m_n) + 1).$$

Пусть  $T_r$  — максимальное из чисел  $N(m_{i_1}, \dots, m_{i_r})$ , где  $m_{i_1}, \dots, m_{i_r}$  — произвольные  $r$  масс из  $m_1, \dots, m_n$ , т. е.

$T_r$  равно максимальному числу столкновений в системе из  $r$  шаров, выбранных из данных  $n$  шаров. Тогда

$$T_r \leq K (2T_{r-1} + 1)$$

(мы опять выписали заведомо грубую оценку).

Наконец, введя  $U_r = T_r + 1$ , получаем

$$U_r = T_r + 1 \leq K (2(U_{r-1} - 1) + 1) + 1 \leq 2KU_{r-1}.$$

Из этого неравенства уже легко получить оценку для  $U_n$ :  
 $U_n \leq 2KU_{n-1} \leq (2K)^2 U_{n-2} \leq \dots \leq (2K)^{n-2} U_2 \leq 2(2K)^{n-2}$

(между двумя шарами на прямой может произойти максимум один удар, так что  $T_2 = 1$ , а  $U_2 = 2$ ).

Следовательно, учитывая равенство (3), получаем

$$N(m_1, \dots, m_n) \leq 2 \left[ 16 \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \right) \sqrt{M_2 M - M_1^2} \right]^{n-2} \quad (4)$$

Так как  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \leq \frac{n}{m_{\min}}$  и  $\sqrt{M_2 M - M_1^2} \leq \frac{1}{2} M (n-1) \leq$

$\leq \frac{1}{2} n (n-1) m_{\max}$  (см. замечание в конце первого этапа), то окончательно получаем верхнюю оценку числа столкновений в исходной системе  $n$  шаров:

$$\begin{aligned} N(m_1, \dots, m_n) &\leq 2 \left( 16 \frac{n}{m_{\min}} \frac{1}{2} n (n-1) m_{\max} \right)^{n-2} = \\ &= 2 \left( 8n^2 (n-1) \frac{m_{\max}}{m_{\min}} \right)^{n-2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Конечно, оценка (5) грубее оценки (4), но одновременно нагляднее ее. Теорема 1 доказана.

Выведем теперь из теоремы 1 общий результат о росте числа столкновений между молекулами газа в одномерном «сосуде» — отрезке  $XU$  с упруго отражающими краями  $X$  и  $U$  (при столкновении шарика с краем — концом отрезка — его скорость меняется на противоположную).

**Т е о р е м а 2.** Число столкновений в системе из  $n$  шаров в одномерном «сосуде»  $XU$  растет не более чем с линейной скоростью по времени  $t$ . Иными словами, существуют такие константы  $c_1$  и  $c_2$ , не зависящие от начальных положений и скоростей шаров, а зависящие только от масс и полной энергии системы, что число столкновений в сосуде  $XU$  за время  $t$  не превосходит  $N(t) \leq c_1 t + c_2$ .



**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Отразим симметрично отрезок  $XU$  вместе со всей системой шаров (поменяв при этом скорости всех шаров на противоположные) относительно концов  $X$  и  $U$ . Получим отрезок  $X'U'$ , на котором уже движутся  $3n$  шаров (рис. 18.1). Столкновению шара с концом отрезка  $XU$  отвечает в новой системе на отрезке  $X'U'$  столкновение двух шаров равной массы (рассматриваемого и симметричного ему), движущихся навстречу друг другу с



Рис. 18.1

равными, но противоположными скоростями; после столкновения эти шары разлетятся, поменявшись скоростями. Можно считать поэтому, что они просто прошли друг сквозь друга. Положим длину отрезка  $XU$  равной 1. За время  $\Delta t =$

$$= \frac{1}{v_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2E/m_{\min}}} = \sqrt{\frac{m_{\min}}{2E}} \text{ ни один шарик, начавший}$$

двигаться из точки  $X'$  или  $Y'$ , не может долететь до концов отрезка  $XU$ . Поэтому за время  $\Delta t$  система шаров в «сосуде»  $XU$  не чувствует краев  $X'$  и  $Y'$  «сосуда»  $X'U'$ . Следовательно, за время  $\Delta t$  число столкновений шаров в сосуде  $XU$  между собой и об края  $X$  и  $U$  не превосходит числа  $N_{3n}$  столкновений  $3n$  шаров на всей бесконечной прямой (так, будто концы  $X'$  и  $Y'$  отсутствуют все это время). По теореме 1

$$N_{3n} \leq 2 \left( 72n^2 (3n-1) \frac{m_{\max}}{m_{\min}} \right)^{3n-2}.$$

За промежуток времени  $t$ , который можно покрыть отрезками  $\Delta t$  в количестве  $k = \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor + 1$  ( $\lfloor \cdot \rfloor$  — целая часть) произойдет, следовательно, не более  $N(t) \leq k \cdot N_{3n}$  столкновений:

$$N(t) \leq \left( \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor + 1 \right) N_{3n} \leq N_{3n} \sqrt{\frac{2E}{m_{\min}}} t + N_{3n} = c_1 t + c_2,$$

что и требовалось доказать.

## Глава 7\*\*

### МНОГОМЕРНЫЙ «ГАЗ»

Уже исследование системы из  $n$  упругих шаров на прямой представляет собой весьма непростую задачу, отчасти решенную нами в гл. 6. Исследование двумерного и трехмерного «газа» молекул вносит новые особенности: меняется характер столкновений и качественно сложнее становится конфигурационное пространство системы. Тем не менее систему из  $n$  молекул удастся свести к бильярдной (правда, многомерной) системе (т. е. к движению бильярдного шара в некоторой области) и доказать утверждения, аналогичные теоремам § 17 и 18. Мы предполагаем, что в системе происходят только д в о й н ы е столкновения.

Опишем, как происходит упругое столкновение д в у х шаров. Отметим, что, в отличие от шаров на прямой из гл. 6, которые мы считали точечными, в этой главе будут рассматриваться шары ненулевого радиуса. Разложим скорость каждого шара на

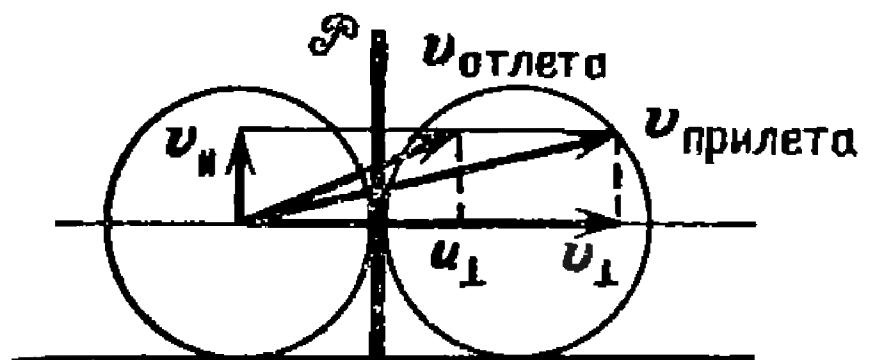


Рис. А

две составляющие — направленную вдоль линии центров шаров и перпендикулярную к ней. В момент столкновения шаров, когда расстояние между их центрами равно сумме радиусов и они имеют общую касательную плоскость  $\mathcal{P}$ , происходит перераспределение нормальных составляющих скоростей «прилета»  $v_{\perp}$ , направленных по линии центров шаров (перпендикулярно плоскости  $\mathcal{P}$ ), согласно формулам (13.1) и (13.2) — законам сохранения импульса и энергии (это дает два алгебраических уравнения с двумя однозначно определяемыми неизвестными — новыми составляющими скоро-

стей вдоль линии их центров). Параллельные же плоскости  $\mathcal{P}$  (тангенциальные) составляющие скоростей  $\mathbf{v}_{\parallel}$  остаются без изменения (рис. А). Сложив новые составляющие скоростей каждого шара, получим скорости их «отлета» (на рис. А  $\mathbf{v}_{\text{отлета}} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$ ). Отметим, что в нашей модели шары при ударе не закручиваются.

Уже одно знание правила обмена скоростей при столкновении двух шаров позволяет решать разнообразные задачи. Приведем две такие задачи.

**Задача 1.** Под каким углом могут разлетаться два одинаковых упругих шара, один из которых покоится?

**Решение.** Случай центрального удара исследовался в задаче 13.2: налетающий шар после удара останавливается, а покоящийся приобретает скорость налетающего, как будто налетевший шар прошел «сквозь» него. Угол разлета здесь равен 0.

Если же удар нецентральный, то движущийся шар полностью передает неподвижному свою центральную составляющую, оставляя себе ортогональную составляющую. Следовательно, угол разлета шаров в этом случае всегда равен  $90^\circ$ .

**Задача 2.** Плоскость разделена вертикальной прямой  $l$  на две полуплоскости. В левой полуплоскости расположен один шар, в правой —  $n$  шаров, все шары одинаковы. Шар из левой полуплоскости посылается с некоторой скоростью в правую и между шарами начинают происходить упругие столкновения. Какое наибольшее число шаров может оказаться в левой полуплоскости в результате всех столкновений?

**Решение.** Слева от прямой  $l$  не могут оказаться все  $n+1$  шаров, так как полный импульс всей системы постоянен и равен импульсу первоначально движущегося шара, т. е. направлен вправо. Не могут слева оказаться и  $n$  шаров, так как в этом случае справа от  $l$  двигался бы один шар, и из закона сохранения импульса его скорость превосходила бы скорость исходного шара (чтобы скомпенсировать отрицательную вдоль горизонтальной оси  $Ox$  составляющую импульса  $n$  левых шаров), а тогда его кинетическая энергия превзошла бы исходную, что противоречит закону сохранения энергии.

Докажем, что слева от прямой  $l$  могут оказаться  $n-1$  шаров.

**Утверждение 1.** Можно так поставить неподвижный шар на пути движущегося, что движущийся шар после удара отклонится на произвольный наперед заданный малый угол. Это ясно из того, что шар можно поставить так, что налетающий шар только немного его коснется, а, значит, и отклонится несильно. При этом угол разлета этих двух шаров будет равен  $90^\circ$  согласно решению предыдущей задачи.

**Утверждение 2.** Неподвижный шар можно поставить так, что если налетающий шар имеет отрицательную составляющую скорости вдоль оси  $Ox$ , то после столкновения скорости обоих шаров будут иметь отрицательные составляющие вдоль этой же оси. Это утверждение — следствие предыдущего: если скорость  $\mathbf{v}$  налетающего шара составляет угол  $\alpha < 90^\circ$  с отрицательным направлением оси  $Ox$ , то неподвижный шар можно поставить так, что скорость первого шара  $\mathbf{u}_1$  после столкновения будет составлять с  $\mathbf{v}$  угол  $\beta = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha)$ , а с отрицательным направлением оси  $Ox$  —

угол  $\alpha + \beta = 1/2(\alpha + 90^\circ) < 90^\circ$ . Скорость второго шара  $u_2$ , направленная под  $90^\circ$  к скорости  $u_1$  первого шара, составит с отрицательным направлением оси  $Ox$  угол  $1/2(90^\circ - \alpha) < 90^\circ$ , т. е. обе скорости  $u_1$  и  $u_2$  имеют отрицательные составляющие вдоль оси  $Ox$ .

Перейдем к доказательству основного утверждения задачи. Присвоим шару слева от прямой  $l$  номер 0, а шары справа от  $l$  занумеруем числами 1, 2, 3, ...,  $n$ . Шар 1 поставим на пути шара 0 так, чтобы шар 0 после столкновения отклонился на  $10^\circ$  (это можно сделать согласно утверждению 1); шар 1 полетит под углом  $80^\circ$  к положительному направлению оси  $Ox$ . На пути шара 1 поставим шар 2 так, чтобы шар 1 отклонился на угол  $10^\circ$ , тогда шар 2 полетит под углом  $20^\circ$  к отрицательному направлению оси  $Ox$  (рис. Б). Шар 3 поставим так, чтобы после столкновения с ним шара 2 оба они полетели в отрицательном направлении оси  $Ox$  (утверждение 2). На пути шаров 2 и 3 поставим шары 4 и 5 соответственно так, чтобы все шары: 2, 3, 4 и 5 после столкновений продолжали двигаться влево. Эта процедура продолжается до полного исчерпания запаса шаров. Задача решена.

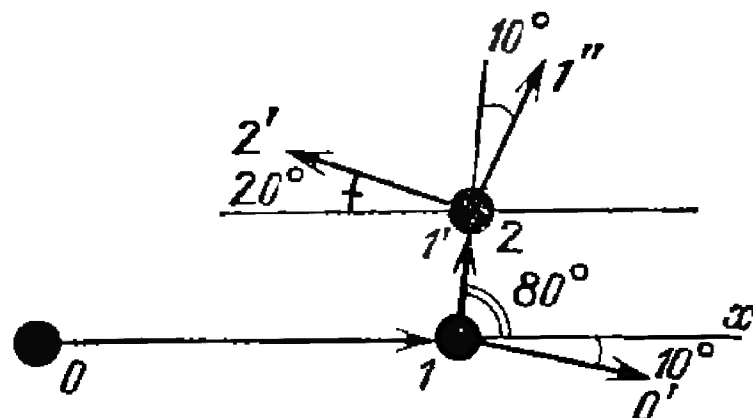


Рис. Б

В этой главе будет последовательно приведено:

А. Описание конфигурационного пространства системы  $n$  упруго сталкивающихся шаров в пространстве и в сосуде специальной формы (к ним относятся (§ 19) многоугольники и многогранники).

Б. Сведение рассматриваемой системы из  $n$  шаров к бильярду в многомерной области сложной формы, описанной довольно просто в § 20.

В. Доказательство дискретности множества моментов столкновений в системе  $n$  шаров (т. е. того, что удары не накапливаются: число ударов между шарами и со стенками сосуда в любой конечный промежуток времени конечно; см. § 21). Фактически это доказательство сводится к решению такой задачи: *может ли бильярдная частица, попавшая в криволинейный угол, стороны которого направлены выпуклостями навстречу друг другу, «застрять» в нем?* Ответ на этот вопрос отрицателен; он решается здесь вполне школьными методами.

Г. Доказательство того, что шары произвольных масс на плоскости или в пространстве разлетаются после *конечного* числа ударов, и оценка роста числа ударов в «газе» из  $n$  молекул в сосуде (например, в параллелепипеде или любом другом многограннике, а также в сосудах с выпуклыми внутрь стенками; см. конец § 21).

## § 19. Конфигурационное пространство «газа» из $n$ молекул в пространстве и сосуде

Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^3$  (случай плоскости  $\mathbb{R}^2$  аналогичен) расположены  $n$  «твердых» шаров с радиусами  $r_1, r_2, \dots, r_n$  (об их массах речь пойдет позже). «Твердость» означает здесь, что ни один шар не может зайти внутрь другого, т. е. расстояние между центрами любых двух шаров  $i$  и  $j$  не меньше суммы их радиусов.

*Каково конфигурационное пространство этих  $n$  шаров?*

Конфигурационное пространство одного шара — то самое трехмерное пространство, в котором он находится, поскольку его центр может находиться в любой точке этого пространства  $(x, y, z)$ .

Положения центров всех  $n$  шаров определяют, таким образом,  $n$  трехмерных пространств, т. е.  $3n$ -мерное изображающее пространство  $\mathbb{R}^{3n}$ , любая точка  $\mathbf{x}$  которого имеет  $3n$  координат — последовательно выписанных координат центров  $n$  шаров:  $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots, x_n, y_n, z_n)$ .

Однако не любая точка пространства  $\mathbb{R}^{3n}$  задает какое-то расположение твердых шаров, т. е. не любая точка  $\mathbb{R}^{3n}$  является конфигурационной. Действительно, расстояние между центрами  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $(x_j, y_j, z_j)$  шаров  $i$  и  $j$  должно быть больше или равно сумме их радиусов  $r_i + r_j$ ; поэтому неравенство

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 < (r_i + r_j)^2 \quad (1)$$

задает невозможное расположение этих шаров (когда один шар «залез» внутрь второго).

Для каждой пары  $(i, j)$  мы должны написать неравенство (1) — получим  $C_n^2 = 1/2 n(n-1)$  неравенств, в совокупности задающих то множество в изображающем пространстве  $\mathbb{R}^{3n}$ , где конфигурационная точка располагаться не может. Это множество назовем *невозможным*, а любую ее точку — *невозможной точкой*. Дополнение к невозможному множеству в  $\mathbb{R}^{3n}$  — это и есть та область  $Q$ , где располагается конфигурационная точка, т. е.  $Q$  — конфигурационное пространство системы  $n$  твердых шаров. Опишем его более детально.

Возьмем шары с номерами 1 и 2 (радиусов  $r_1$  и  $r_2$ ) и забудем на время об остальных  $n-2$  шарах. Если центр  $(x_1, y_1, z_1)$  шара 1 зафиксировать, то неравенство (1) для  $i=1$ ,  $j=2$  задаст множество *невозможных* центров  $(x_2, y_2, z_2)$  шара 2. Им является шар  $\mathbb{W}_1$  с центром  $(x_1, y_1, z_1)$  радиуса  $r_1 + r_2$  (рис. 19.1). Если же зафиксировать центр  $(x_2, y_2, z_2)$

шара 2, то неравенство (1) задаст невозможные положения центров  $(x_1, y_1, z_1)$  шара 1 — им является шар  $\mathbb{Ш}_2$  с центром  $(x_2, y_2, z_2)$  того же радиуса  $r_1 + r_2$ . Шары  $\mathbb{Ш}_1$  и  $\mathbb{Ш}_2$  мы должны рассматривать в различных экземплярах трехмерного пространства  $\mathbb{R}_1^3$  и  $\mathbb{R}_2^3$ , а невозможная точка  $x = (x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$  принадлежит  $3 + 3 = 6$ -мерному пространству  $\mathbb{R}^6$ . Точки  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  независимо друг от друга пробегают полностью свои трехмерные пространства —  $\mathbb{R}_1^3$  и  $\mathbb{R}_2^3$  соответственно, и каждой из них отвечает конкретный шар —  $\mathbb{Ш}_1$  и  $\mathbb{Ш}_2$  радиуса  $r_1 + r_2$  — в другом

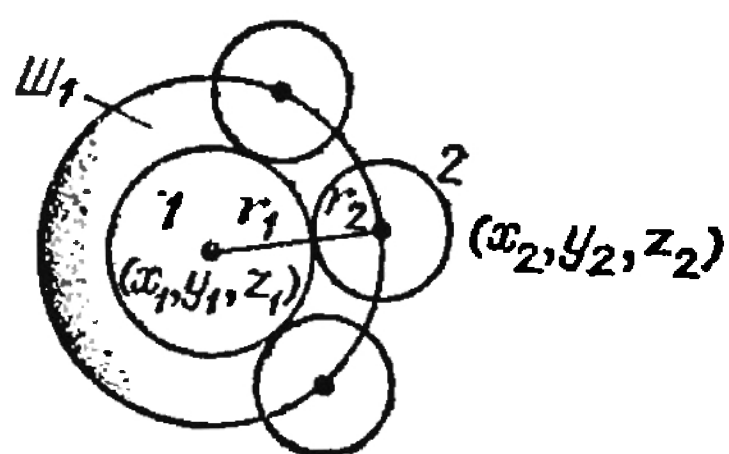


Рис. 19.1

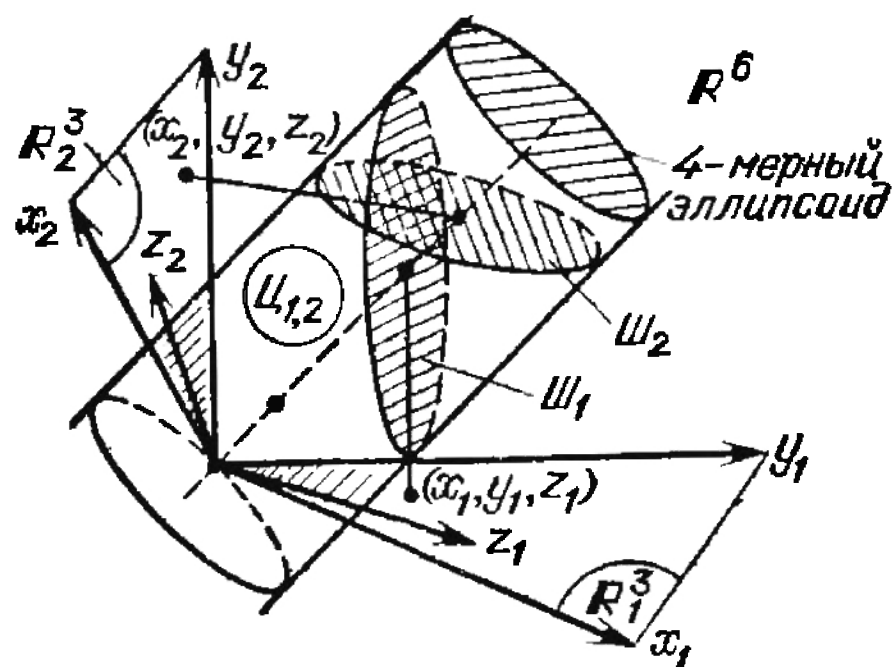


Рис. 19.2

трехмерном пространстве ( $\mathbb{Ш}_1$  в пространстве  $\mathbb{R}_1^3$ ,  $\mathbb{Ш}_2$  — в  $\mathbb{R}_2^3$ ). Следовательно, невозможное множество в рассматриваемом случае двух шаров — внутренность бесконечного наклонного (под равными углами к осям  $Ox_1, Oy_1, Oz_1, Ox_2, Oy_2, Oz_2$ ) цилиндра в 6-мерном пространстве  $\mathbb{R}^6$  (условная картинка для этой ситуации приведена на рис. 19.2). Граница этого цилиндра — 5-мерная выпуклая поверхность в 6-мерном пространстве (сечения которой — 4-мерные эллипсоиды или 4-мерные сферы  $S^4$ ).

Фиксированному невозможному положению шаров 1 и 2 (когда они пересекаются) отвечает произвольное положение шаров 3, 4, ...,  $n$ , и поэтому центры всех  $n$  шаров задают в пространстве  $\mathbb{R}^{3n}$  невозможную точку  $(x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n)$ , лежащую в произведении внутренней полученного цилиндра на  $(3n-6)$ -мерное пространство  $\mathbb{R}^{3n-6}$ , т. е. внутри бесконечного цилиндра  $\mathbb{C}_{1,n}$  в  $3n$ -мерном пространстве, у которого «образующая» — это  $(3n-6)$ -мерное пространство  $\mathbb{R}^{3n-6}$ , а перпендикулярное сечение — 4-мерный эллипсоид (рис. 19.2).

Как было сказано выше, невозможное множество в  $\mathbb{R}^{3n}$  — это  $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$  внутренностей таких бесконеч-



ных цилиндров  $\mathcal{C}_{ij}$ , а конфигурационное пространство  $Q$  — область в  $n$  этих цилиндрах. Заметим, что все  $S_n^2$  цилиндров пересекаются по некоторой области в  $\mathbb{R}^{3n}$ , — она соответствует одновременному пересечению всех  $n$  шаров в исходном трехмерном пространстве.

Из всего сказанного важно усвоить следующее: конфигурационное пространство  $n$  свободных упругих твердых трехмерных шаров  $Q$  — это многомерное ( $3n$ -мерное) пространство, из которого выкинуто  $S_n^2$  выпуклых множеств  $\mathcal{C}_{ij}$  (читатель может представлять себе  $\mathcal{C}_{ij}$  в виде обычных трехмерных цилиндров), так что само  $Q$  — невыпуклое множество.

Иными словами, конфигурационным пространством  $Q$  можно считать бесконечный сосуд с выпуклыми внутрь стенками (границами цилиндров), внутри которого летает конфигурационная точка  $x$ , как-то отражаясь от его стенок (рис. 19.3) Если точка  $x$  попадает на цилиндр  $\mathcal{C}_{ij}$ , то это

значит, что в этот момент столкнулись шары  $i$  и  $j$ , а остальные шары не столкнулись.

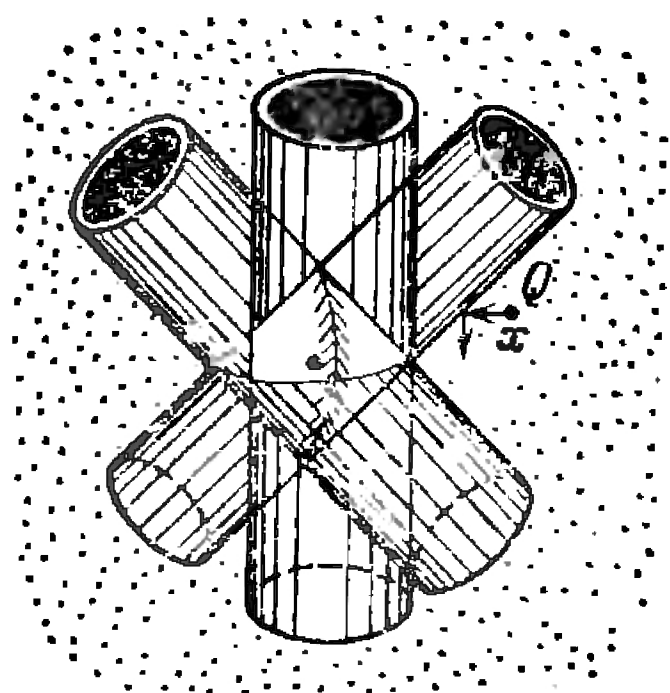
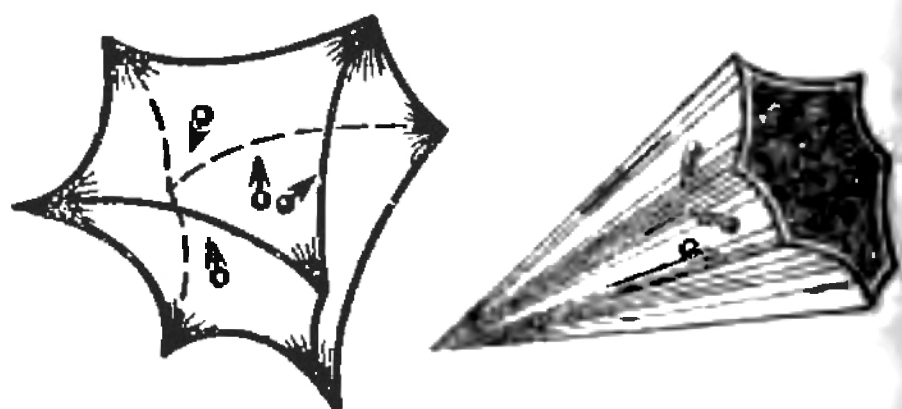


Рис. 19.3



Сосуды с «газом»

Рис. 19.4

Перейдем к «газу» молекул в сосуде. Мы ограничимся специальным, но широким классом сосудов, похожих на конфигурационное пространство «газа» молекул. Сосуд — это часть трехмерного пространства, ограниченная или неограниченная, которая получается, если из пространства выкинуть конечное число выпуклых тел (как выше в  $3n$ -мерном пространстве были выкинуты выпуклые пересекающиеся цилиндры  $\mathcal{C}_{ij}$ ). Стенки сосуда, таким образом, считаются выпуклыми внутрь сосуда (среди них могут встречаться и плоские стенки) (рис. 19.4). Например, сосудом может быть многогранный угол с плоскими или выпуклыми внутрь стенками. Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можно показать, что справедливо

**У т в е р ж д е н и е.** Конфигурационным пространством системы  $n$  твердых упругих шаров в трехмерном сосуде



с выпуклыми внутрь стенками является сосуд  $Q$  в  $3n$ -мерном пространстве также с выпуклыми внутрь  $(3n-1)$ -мерными стенками.

В следующем параграфе мы сведем движение конфигурационной точки  $x$  в указанном сосуде  $Q$  к движению бильярдной частицы в некотором другом сосуде  $\tilde{Q}$ , имеющем также выпуклые внутрь стенки.

### § 20. Сведение «газа» в пространстве и сосуде к бильярду

Итак, мы выяснили устройство конфигурационного пространства  $Q$  системы  $n$  твердых шаров в пространстве и в сосуде с выпуклыми внутрь стенками:  $Q$  представляет собой сосуд в  $3n$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^{3n}$  с выпуклыми внутрь  $(3n-1)$ -мерными стенками  $W_1, \dots, W_k$ . В пространстве  $\mathbb{R}^{3n}$  имеется  $3n$  осей:  $Ox_1, Oy, Oz_1; Ox_2, Oy_2, Oz_2; \dots; Ox_n, Oy_n, Oz_n$ , а конфигурационная точка  $x \in Q$  имеет  $3n$  координат:  $x = (x_1, y_1, z_1; \dots; x_n, y_n, z_n)$ . Конфигурационная точка  $x$  движется в сосуде  $Q$  следующим образом: между ее столкновениями со стенками  $\{W_i\}$  она движется равномерно и прямолинейно (это соответствует тому, что в исходной системе трехмерных шаров в сосуде также нет столкновений, т. е. шары движутся равномерно и прямолинейно); столкновению шара с другим шаром или со стенкой сосуда соответствует попадание конфигурационной точки  $x$  на одну из стенок  $W_i$  сосуда  $Q$  (если точка  $x$  попала на пересечение двух или нескольких стенок, то это соответствует тройному или многократному столкновению шаров, а такие столкновения мы исключили из рассмотрения). Таким образом, конфигурационная траектория является ломаной, состоящей из прямых звеньев.

Как и в гл. 5 и 6, произведем преобразование пространства  $\mathbb{R}^{3n}$ , выполнив следующие растяжения по осям:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \sqrt{m_1} x_1, & \tilde{y}_1 &= \sqrt{m_1} y_1, & \tilde{z}_1 &= \sqrt{m_1} z_1; \\ \tilde{x}_2 &= \sqrt{m_2} x_2, & \tilde{y}_2 &= \sqrt{m_2} y_2, & \tilde{z}_2 &= \sqrt{m_2} z_2; \\ & \dots & & & & \\ \tilde{x}_n &= \sqrt{m_n} x_n, & \tilde{y}_n &= \sqrt{m_n} y_n, & \tilde{z}_n &= \sqrt{m_n} z_n. \end{aligned}$$

При таком преобразовании область  $Q$  перейдет в область  $\tilde{Q}$  также с выпуклыми внутрь стенками  $\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_k$ , а траектория конфигурационной точки  $x$  — в траекторию новой

ТОЧКИ

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{z}_n),$$

которая также является ломаной. Будем обозначать переход от  $\mathbf{x}$  к  $\tilde{\mathbf{x}}$  символически равенством  $\tilde{\mathbf{x}} = V\overline{m} \mathbf{x}$ , где  $V\overline{m}$  символизирует указанные растяжения по осям. Докажем следующее

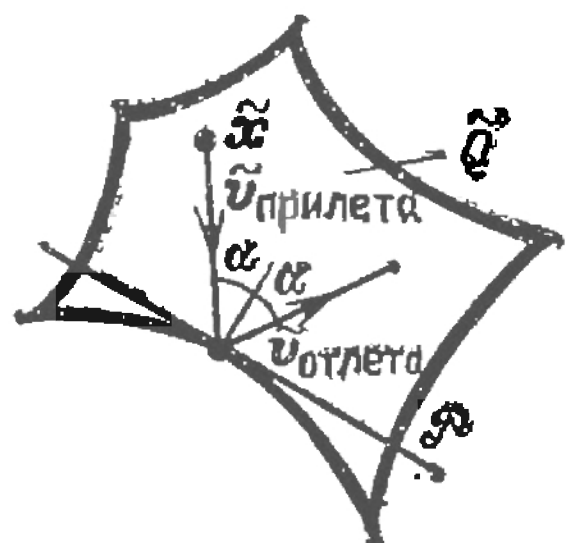


Рис. 20.1

**Утверждение.** Точка  $\tilde{\mathbf{x}}$  является бильярдной частицей в сосудае  $\tilde{Q}$ , т. е. модуль ее скорости равен 1 и каждые два соседние звена ее траектории образуют равные углы с внутренней нормалью  $\tilde{n}$  к стенке  $\tilde{W}$  в точке излома траектории (рис. 20.1).

**Замечание.** Прежде чем читать дальше, советуем читателю вновь обратиться к § 16, где аналогичное утверждение для трех шаров на прямой доказано с помощью понятия скалярного произведения векторов.

**Доказательство.** Замене координат  $\tilde{\mathbf{x}} = V\overline{m} \mathbf{x}$  соответствует точно такая же замена скорости точки  $\mathbf{x}$ , т. е. если  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  — скорость конфигурационной точки  $\mathbf{x}$ , а  $\tilde{\mathbf{v}}$  — скорость точки  $\tilde{\mathbf{x}}$ , то  $\tilde{\mathbf{v}} = V\overline{m} \mathbf{v}$ :

$$\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n) = (V\overline{m}_1 v_1, V\overline{m}_2 v_2, \dots, V\overline{m}_n v_n),$$

где  $v_i$  — трехмерная скорость  $i$ -го шара в рассматриваемый момент времени. Пусть  $E$  — полная энергия всей системы  $n$  шаров:

$$E = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m |v_i|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{m_i (v_i, v_i)}{2};$$

по закону сохранения энергии  $E = \text{const}$ . Положим (выбором соответствующей единицы измерения энергии)  $2E = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{v}}|^2 = (\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}) &= \sum_{i=1}^n (V\overline{m}_i v_i, V\overline{m}_i v_i) = \sum_{i=1}^n m_i (v_i, v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i |v_i|^2 = 2E = 1. \end{aligned}$$

Итак, проверено, что модуль скорости точки  $\tilde{\mathbf{x}}$  в каждый момент равен 1. Осталось проверить свойство «угол паде-

ния равен углу отражения». Для этого достаточно доказать, что вектор, равный разности скоростей отлета и прилета в точке столкновения со стенкой, перпендикулярен к этой стенке (точнее, к касательной к этой стенке плоскости).

Пусть  $\mathbf{v}_n$  — скорость прилета точки  $\tilde{x}$ , а  $\tilde{\mathbf{v}}_o$  — скорость ее отлета (рис. 20.1). Если точка  $\tilde{x}$  попала на стенку  $\tilde{W}$  сосуда  $\tilde{Q}$ , то это означает, что либо какой-то шар в исходном сосуде столкнулся с его стенкой — будем считать, что это шар 1, либо столкнулись какие-то два шара в сосуде — будем считать, что это шары 1 и 2. Тогда

$$\tilde{\mathbf{v}}_n = (V\overline{m}_1 \mathbf{v}_{1n}, V\overline{m}_2 \mathbf{v}_{2n}; V\overline{m}_3 \mathbf{v}_3, V\overline{m}_4 \mathbf{v}_4, \dots, V\overline{m}_n \mathbf{v}_n) \in \mathbb{R}^{3n},$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_o = (V\overline{m}_1 \mathbf{v}_{1o}, V\overline{m}_2 \mathbf{v}_{2o}; V\overline{m}_3 \mathbf{v}_3, V\overline{m}_4 \mathbf{v}_4, \dots, V\overline{m}_n \mathbf{v}_n) \in \mathbb{R}^{3n},$$

где  $\mathbf{v}_{in}$ ,  $\mathbf{v}_{io}$  — скорости прилета и отлета  $i$ -го шара в трехмерном сосуде,  $i=1, 2$  (скорости шаров 3, 4, ...,  $n$ , разумеется, не меняются в момент удара). В случае, когда шар 1 сталкивается со стенкой,  $\mathbf{v}_{2n} = \mathbf{v}_{2o} = \mathbf{v}_2$ .

Обозначим через  $P$  (двумерную) плоскость касания столкнувшихся шаров 1 и 2 или шара 1 со стенкой в трехмерном сосуде; ей отвечает  $(3n-1)$ -мерная касательная плоскость  $\mathcal{P}$  к рассматриваемой стенке  $\tilde{W}$  сосуда  $\tilde{Q}$  (рис. 20.2).

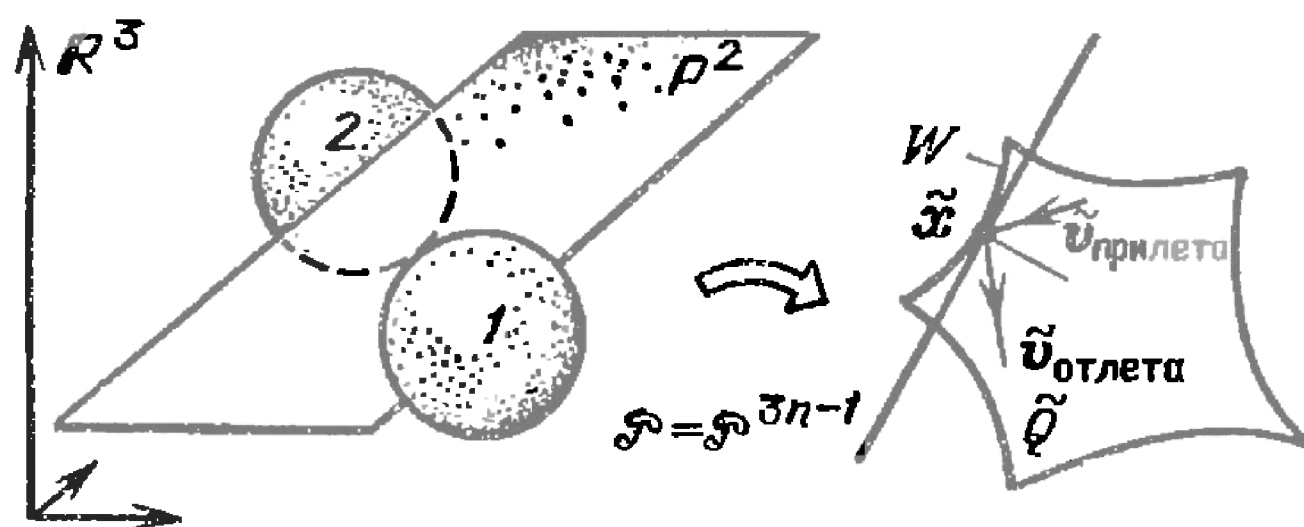


Рис. 20.2

Разберем сначала случай *столкновения шаров*. Напомним, что в момент упругого столкновения шаров их тангенциальные составляющие сохраняются, а нормальные перераспределяются по законам сохранения импульса и энергии.

Пусть шары 1 и 2 столкнулись друг с другом и коснулись плоскости  $P$  в точке, являющейся концом трехмерного вектора  $\mathbf{a}$ , а шары 3, 4, ...,  $n$  в этот момент расположены произвольным образом — их центрами являются произволь-

ные (допустимые) векторы  $r_3, r_4, \dots, r_n$  трехмерного пространства. Тогда  $3n$ -мерный вектор

$$r = (V\overline{m_1}a, V\overline{m_2}a; r_3, r_4, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{3n}$$

отвечает столкновению шаров 1 и 2 и лежит в плоскости  $\mathcal{P}$ , причем если вектор  $a$  пробегает все пространство  $\mathbb{R}^3$  (или всю область внутри сосуда в  $\mathbb{R}^3$ , если рассматривается «газ» в сосуде), то плоскость  $\mathcal{P}$  состоит только из таких векторов. Следовательно, нам надо доказать, что  $(\tilde{v}_0 - \tilde{v}_n) \perp r$ ; этого достаточно, чтобы «угол падения» был равен «углу отражения». Вычислим скалярное произведение этих векторов и получим 0, что и докажет их взаимную перпендикулярность. Напомним, что скалярное произведение двух векторов одного евклидова пространства  $\mathbb{R}^N$  (любой размерности  $N$ ) равно сумме произведений их одноименных координат:

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2, \dots, x_N), (y_1, y_2, \dots, y_N) \rangle &= \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_Ny_N. \end{aligned}$$

Скалярное произведение в  $\mathbb{R}^{3n}$ , в отличие от скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)$  в  $\mathbb{R}^3$ , будем обозначать  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Вычисляем:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_0 - \tilde{v}_n &= (V\overline{m_1}(v_{10} - v_{1n}); V\overline{m_2}(v_{20} - v_{2n}); 0; 0; 0; \dots; 0); \\ \langle \tilde{v}_0 - \tilde{v}_n, r \rangle &= \\ &= \langle (V\overline{m_1}(v_{10} - v_{1n}); V\overline{m_2}(v_{20} - v_{2n}); 0; \dots; 0), \\ &\quad (V\overline{m_1}a; V\overline{m_2}a; r_3; \dots; r_n) \rangle = (V\overline{m_1}(v_{10} - v_{1n}), \\ &\quad V\overline{m_1}a) + (V\overline{m_2}(v_{20} - v_{2n}), V\overline{m_2}a) + 0 + \dots + 0 = \\ &= m_1(v_{10} - v_{1n}, a) + m_2(v_{20} - v_{2n}, a) = \\ &= (p_1^{(+)} - p_1^{(-)}, a) + (p_2^{(+)} - p_2^{(-)}, a) = (\Delta p_1 + \Delta p_2, a) = 0. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:  $p_1^{(+)} = m_1 v_{10}$ ,  $p_1^{(-)} = m_1 v_{1n}$ ,  $p_2^{(+)} = m_2 v_{20}$ ,  $p_2^{(-)} = m_2 v_{2n}$ ,  $\Delta p_1 = p_1^{(+)} - p_1^{(-)}$ ,  $\Delta p_2 = p_2^{(+)} - p_2^{(-)}$  — импульсы, приобретенные соответственно шарами 1 и 2 после удара. При этом по закону сохранения импульса  $\Delta p_1 + \Delta p_2 = 0$ ; действительно,  $p_1^{(-)} + p_2^{(-)} = p_1^{(+)} + p_2^{(+)}$ .

Мы доказали тем самым, что точка  $\tilde{x}$  отражается по бильярдному закону, когда она попадает на стенку  $\tilde{W}$ , являющуюся каким-то цилиндром  $\mathcal{C}_{1,2}$ , т. е. когда стенка  $\tilde{W}$  отвечает за столкновение шаров 1 и 2.

Если же стенка  $\tilde{W}$  сосуда  $\tilde{Q}$  отвечает за столкновение шара 1 с какой-то стенкой исходного трехмерного сосуда, то надо доказать, что

$$(\tilde{v}_0 - \tilde{v}_n) \perp k,$$

где

$$k = (V\overline{m_1}b; r_2; r_3; \dots; r_n) \in \mathbb{R}^{3n},$$

$b \in \mathbb{R}^3$  — вектор, принадлежащий двумерной плоскости касания шара 1 со стенкой исходного сосуда;  $r_2, r_3, \dots, r_n \in \mathbb{R}^3$  — допустимые центры шаров 2, 3, ...,  $n$ , а  $v_{2n} = v_{20} = v_2$ . Опять вычисляем скалярное произведение и получаем 0:

$$\begin{aligned} \langle (\tilde{v}_0 - \tilde{v}_n), k \rangle &= \\ &= \langle (V\overline{m_1}(v_{10} - v_{1n}); 0; \dots; 0), (V\overline{m_1}b; r_2; r_3; \dots; r_n) \rangle = \\ &= (V\overline{m_1}(v_{10} - v_{1n}), V\overline{m_1}b) = (m_1v_{10} - m_1v_{1n}, b) = \\ &= (p^{(+)} - p^{(-)}, b) = (\Delta p, b) = 0, \end{aligned}$$

поскольку  $p^{(+)} = p^{(-)}$  при абсолютно упругом ударе шара о стенку. Утверждение доказано.

## § 21. Рост числа столкновений между молекулами «газа»

В предыдущих двух параграфах движение абсолютно упругих шаров в трехмерном пространстве или сосуда с выпуклыми внутрь стенками было сведено к движению бильярдной частицы  $\tilde{x}$  в области  $\tilde{Q}$   $3n$ -мерного пространства  $\mathbb{R}^{3n}$ , представляющей собой сосуд с *выпуклыми внутрь* стенками  $\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_k$ . Сосуд  $\tilde{Q}$  обобщает рассмотренные в гл. 6 многогранные углы с *плоскими* стенками —  $\tilde{Q}$  может быть многогранным углом или ограниченной областью с *выпуклыми внутрь* стенками (рис. 21.1). Возникает вопрос, аналогичный поставленному в гл. 5 и 6:



Рис. 21.1

Могут ли точки столкновения частицы  $\tilde{x}$  со стенками сосуда  $\tilde{Q}$  бесконечно накапливаться? Например, может ли бильярдная частица  $\tilde{x}$  «застрясть» в угле с выпуклыми внутрь стенками? (На плоскости легко нарисовать две касающиеся

кривые, образующие нулевой угол — вылетит ли из него бильярдная частица или застрянет?) Более точно:

Конечно ли число столкновений бильярдной частицы  $\tilde{x}$  с  $\tilde{Q}$  со стенками  $\{\tilde{W}_i\}$  за конечный промежуток времени  $T < +\infty$ ?

Положительный ответ на этот вопрос дается теоремой 1 и означает дискретность (т. е. отсутствие точек

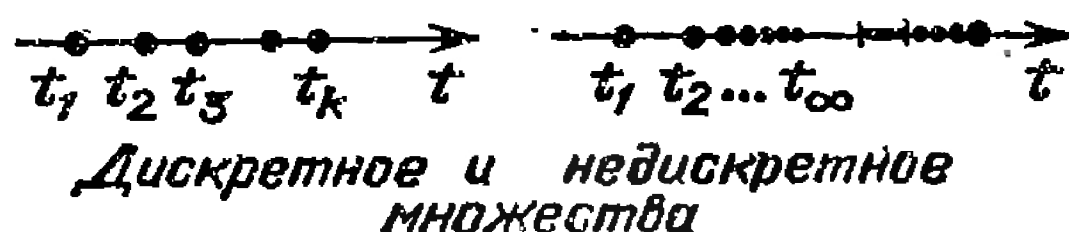


Рис. 21.2

накопления) множества  $\{t_k\}$  моментов столкновений (рис. 21.2).

**Т е о р е м а 1.** Множество моментов столкновений бильярдной частицы  $\tilde{x}$  в сосуде  $\tilde{Q}$  с его стенками дискретно.

**С л е д с т в и е.** Множество всех моментов столкновений в системе абсолютно упругих шаров, движущихся в сосуде с выпуклыми внутрь стенками, дискретно: на любом конечном интервале времени число столкновений шаров друг с другом и со стенками конечно.

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы** проведем от противного. Предположим, что существует точка накопления  $t_0 \neq +\infty$  моментов  $t_1, t_2, t_3, \dots$  столкновений частицы  $\tilde{x}$  о стенки сосуда  $\tilde{Q}$ . Раз  $t_k \rightarrow t_0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то в сосуде  $\tilde{Q}$  есть точка  $A$ , являющаяся геометрической точкой накопления точек столкновения, т. е.  $\tilde{x}(t_k) \rightarrow A$  при  $t_k \rightarrow t_0$ . Точка  $A$  принадлежит сразу нескольким стенкам  $\tilde{W}_{i_1}, \dots, \tilde{W}_{i_s}$  сосуда  $\tilde{Q}$ , образующим «кривой многогранный угол с выпуклыми навстречу друг другу стенками». Мы будем считать, что рассматриваемые моменты столкновения находятся на таком маленьком интервале вокруг точки  $t_0$ , что точка  $\tilde{x}$  сталкивается т о л ь к о с указанными стенками сосуда  $\tilde{Q}$ , и уже не сталкивается с остальными его стенками (с которыми могла сталкиваться до этого). Кроме того, частица  $\tilde{x}$  никогда не попадает в  $A$  — удар в  $A$  запрещен.

Пусть  $\rho(\tilde{x}(t), A)$  — расстояние от частицы  $\tilde{x}$  до точки  $A$  в момент  $t$ . Из того, что  $\tilde{x}(t) \rightarrow A$ , следует, что

$$\rho(\tilde{x}(t), A) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_0. \quad (1)$$

Мы же докажем сейчас, что при всех  $t$ , сколь угодно близких

к  $t_0$ ,  $\rho(\tilde{x}(t), A)$  больше некоторой положительной константы, т. е. не стремится к 0, и тем самым получим нужное противоречие.

Для этого мы введем следующую функцию времени  $r(t)$  — расстояние от точки  $A$  до луча  $\gamma_{\tilde{x}}(t)$  с началом в точке  $\tilde{x}(t)$  и направленным в сторону движения частицы  $\tilde{x}$  (рис. 21.3).

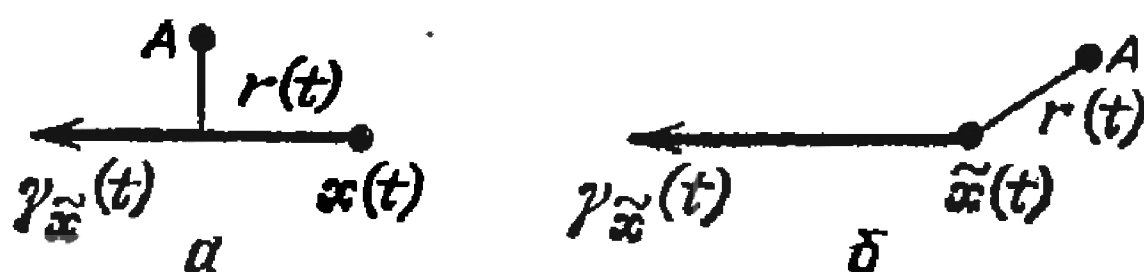


Рис. 21.3

**Л е м м а.** Функция  $r(t)$  — «расстояние от точки  $A$  до луча  $\gamma_{\tilde{x}}(t)$ » — положительная неубывающая функция переменной  $t$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** этой леммы разобьем на две части: докажем ее сначала на промежутке  $(t_{k-1}, t_k)$  между двумя ударами, а затем — в сам момент удара  $t_k$  (вернее, на маленьком промежутке  $(t_k - \epsilon, t_k + \epsilon)$ , охватывающем момент удара).

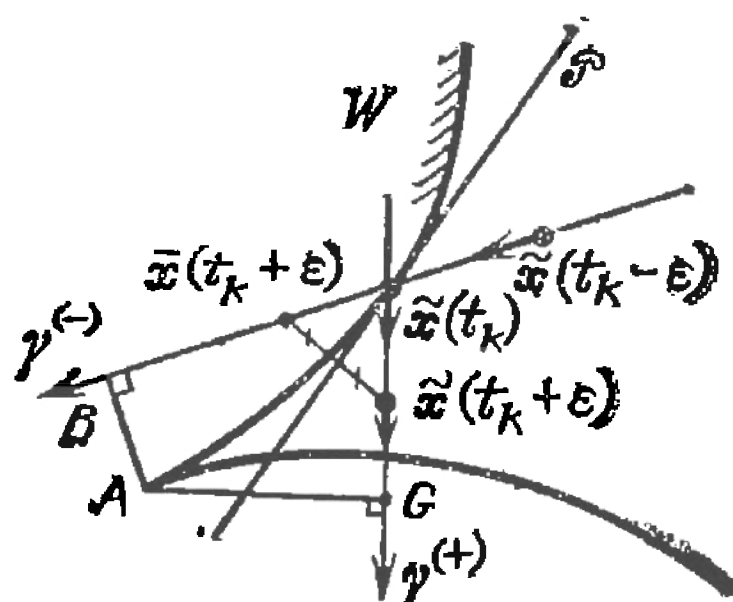
1. Между двумя последовательными ударами частицы о стенки сосуда луч  $\gamma_{\tilde{x}}(t)$  передвигается по себе — переходит в свою часть, т. е.  $\gamma_{\tilde{x}}(t)$  содержит луч  $\gamma_{\tilde{x}}(t')$  при  $t' > t$ , поэтому расстояние от точки  $A$  до луча  $\gamma_{\tilde{x}}(t')$  может только увеличиться (как на рис. 21.3, б, когда это расстояние равно длине отрезка с концами  $A$  и  $\tilde{x}$ ) либо остаться тем же (как на рис. 21.3, а, когда расстояние от  $A$  до луча равно длине перпендикуляра, опущенного из  $A$  на этот луч). Итак, если  $t < t'$  — моменты времени между двумя последовательными ударами, то  $r(t) \leq r(t')$ .

2. Пусть теперь  $t_k$  — момент столкновения частицы со стенкой  $\tilde{W}$ ,  $(t_k - \epsilon, t_k + \epsilon)$  — маленький временной интервал вокруг этого момента.

Обозначим  $\gamma^{(-)} = \gamma_{\tilde{x}}(t_k - \epsilon)$  луч, по которому частица подлетела к стенке  $\tilde{W}$ , а  $\gamma^{(+)} = \gamma_{\tilde{x}}(t_k)$  — луч, по которому она отлетела от этой стенки. Пусть  $\mathcal{P}$  — касательная плоскость к стенке  $\tilde{W}$  в точке удара  $\tilde{x}(t_k)$ , причем вся стенка лежит по одну сторону от нее, как ограничивающая выпуклое множество (рис. 21.4). Если отразить луч



$\gamma^{(+)}$  симметрично относительно плоскости  $\mathcal{P}$ , то он перейдет в луч  $\gamma_{\tilde{x}}^{(-)}(t_k)$  — продолжение луча  $\gamma^{(-)}$  (см. рис. 21.4), и поэтому луч  $\gamma_{\tilde{x}}^{(-)}(t_k)$  с началом в точке  $\tilde{x}(t_k) \in \tilde{W}$  лежит с той же стороны от плоскости  $\mathcal{P}$ , что и точка  $A$ , а луч  $\gamma^{(+)}$  — с другой стороны от плоскости  $\mathcal{P}$ . Следовательно, расстоя-



$$\begin{aligned} AB &= r(t_k - \epsilon) \\ AC &= r(t_k + \epsilon) \\ AC &> AB \end{aligned}$$

Рис. 21.4

ние  $AB$  до луча  $\gamma^{(-)}$  меньше расстояния  $AC$  до луча  $\gamma^{(+)}$ , что и означает, что  $r(t_k - \epsilon) < r(t_k + \epsilon)$ . Лемма доказана.

Из нее следует, что частица  $\tilde{x}$  не может сколь угодно близко приблизиться к точке  $A$ , т. е. неверна формула (1). Действительно, в противном случае сколь угодно малым стало бы и расстояние  $r(t)$  при  $t \rightarrow t_0$ , хотя в лемме было доказано, что расстояние  $r(t)$  от точки  $A$  до луча, по которому движется частица, не меньше расстояния  $r(0)$  от

точки  $A$  до первоначального луча  $\gamma_{\tilde{x}}(0)$ , по которому летела частица. Можно даже оценить, сколько времени частица  $\tilde{x}(0)$  будет приближаться к точке  $A$  — оно не больше (в предположении, что модуль скорости частицы равен 1) расстояния  $d(0)$  от точки  $\tilde{x}(0)$  до точки  $B$  — основания перпендикуляра

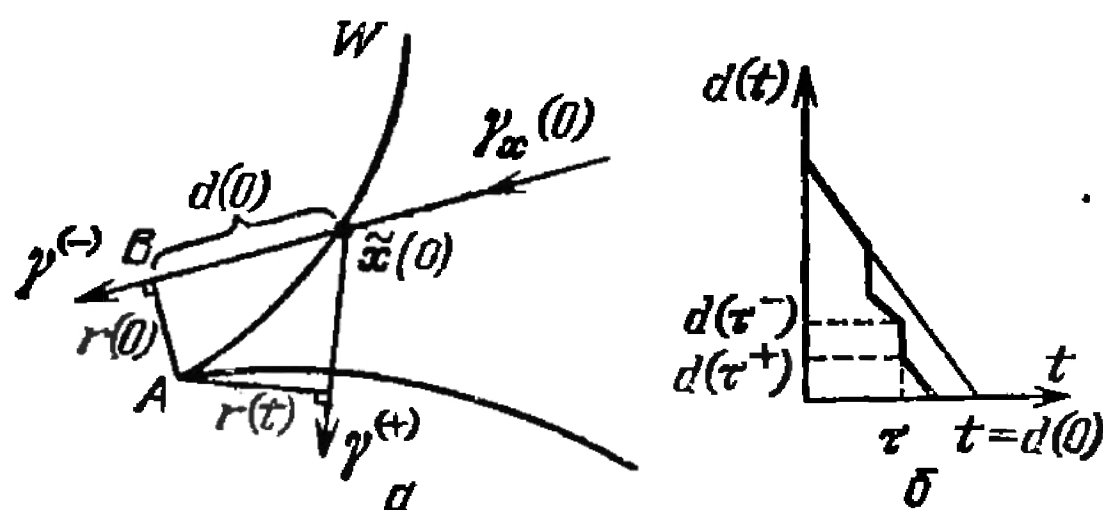


Рис. 21.5

$AB$ , опущенного из  $A$  на луч  $\gamma_{\tilde{x}}(0)$  (рис. 21.5, а). Действительно, если бы на пути частицы не было стенки  $\tilde{W}$ , она приближалась бы к точке  $A$  по лучу  $\gamma_{\tilde{x}}(0)$  вплоть до совпадения с точкой  $B$ , т. е. время  $d(0)$ , а потом стала бы удаляться от точки  $A$ . Но из-за того, что в результате столкновений со стенками расстояние  $r(t)$  от точки  $A$  до луча движения

частицы *р а с т е т*, расстояние  $d(t)$  от точки  $\tilde{x}(t)$  до основания перпендикуляра  $B(t)$ , опущенного из  $A$  на луч  $\gamma_{\tilde{x}}(t)$ , *у м е н ь ш а е т с я*, и общее время приближения частицы  $\tilde{x}$  к точке  $A$  поэтому меньше  $d(0)$  (график изменения  $d(t)$  приведен на рис. 21.5, б).

Теорема 1, таким образом, доказана.

Сделаем простое, но очень важное замечание. Теорема 1 в некотором смысле обобщает геометрические теоремы § 15 о «незастреваемости» бильярдного шара в угле с прямолинейными сторонами на плоскости и в многогранном угле с плоскими стенками в пространстве. Однако есть и существенное отличие. В § 15 мы фактически во всех случаях указали число столкновений со стенками угла, больше которого не может быть на всем бесконечном интервале времени. В нашей же теореме 1 мы этого не только не утверждали, но и *н е м о ж е м* утверждать существования такой оценки числа ударов:

В самом деле, если взять на плоскости «нулевой» угол, образованный двумя касающимися выпуклыми кривыми, смотрящими друг навстречу другу (например, двумя параболками  $y = -10^{-10}x^2$  и  $y = 10^{-100}x^2$ ), то чем ближе к их общей касательной мы запустим бильярдную частицу, тем большее число столкновений произойдет, прежде чем она вылетит из этого угла, и это число может быть сделано больше любого наперед заданного  $N_0$ . Однако если рассматриваемый кривой угол «ненулевой», т. е. в него можно поместить обычный многогранный угол с плоскими стенками так, что его вершина принадлежит пересечению стенок кривого угла, то верхняя оценка числа ударов, по-видимому (пока это недоказанная гипотеза), существует. Сообщим без доказательства, что для системы шаров в трехмерном пространстве в отвечающем ей бильярде  $\bar{Q}$  все кривые многогранные углы между соседними стенками сосуда  $\{\tilde{W}_i\}$  *н е н у л е в ы е*. Это позволит нам доказать конечность числа столкновений между шарами в пространстве на всем бесконечном интервале времени, а не только на любом конечном, правда, уже не геометрическим, а аналитическим способом, похожим на доказательство § 17. На основе этого будет затем объяснено, почему число столкновений между молекулами «газа», помещенного в сосуд с плоскими и выпуклыми внутрь стенками, *р а с т е т л и н е й н о* со временем.

*Т е о р е м а 2. В системе из  $n$  упругих шаров с произвольными массами  $m_1, \dots, m_n$ , движущихся в трехмерном*

пространстве, за бесконечный промежуток времени может произойти лишь конечное число столкновений.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Разобьем сначала всю систему шаров на а в т о н о м н ы е группы, т. е. такие группы, что никакие два шара из разных групп начиная с некоторого момента  $T_0$  уже никогда не сталкиваются друг с другом (таких групп может быть и одна — вся система шаров). Мы хотим доказать, что *таких групп будет ровно  $n$ , по одному шару в группе* — это и означает,

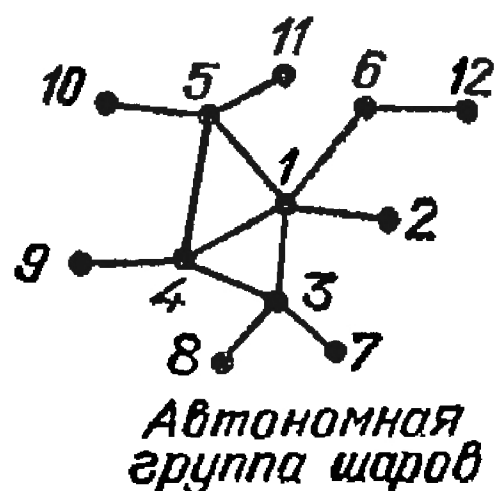


Рис. 21.6

что шары с момента  $T_0$  не сталкиваются. Если в какой-то группе больше одного шара, то в ней происходит бесконечное число столкновений (иначе группа распалась бы на более мелкие автономные подгруппы), причем для любых двух шаров  $A$  и  $B$  из этой группы найдутся такие шары  $C_1, C_2, \dots, C_n$  из той же группы, что  $A$  сталкивается с  $C_1$  бесконечно много раз,  $C_1$  и  $C_2$  сталкиваются

бесконечно много раз,  $\dots, C_n$  и  $B$  сталкиваются бесконечно много раз: можно представлять себе связный граф с конечным числом вершин, символизирующих шары в группе, причем ребром соединены те вершины, для которых соответствующие шары сталкиваются бесконечно много раз (рис. 21.6).

Предположим, что имеются автономные группы, в которых больше одного шара. Рассмотрим одну из них и обозначим ее  $I$  (в качестве примера можно иметь в виду группу, изображенную на рис. 21.6). Выберем в этой группе какие-то два шара, сталкивающихся между собой бесконечное число раз. Выше уже доказано, что все эти столкновения между ними не могут произойти на к о н е ч н о м промежутке времени (столкновения не скапливаются по теореме 1), так что эти моменты столкновений стремятся к  $+\infty$ . Точно так же, как и в § 17 при аналитическом доказательстве конечности числа столкновений между  $n$  шарами на п р я м о й (см. п. А § 17), можно доказать, что у этих шаров существуют предельные скорости при  $t \rightarrow \infty$ , равные между собой как векторы (мы не останавливаемся на подробном доказательстве, полученном Л. Н. Васерштейном и Г. А. Гальпериным и использующем существенную математическую технику, связанную с системами центрально отталкивающихся частиц). А так как любые два шара из автономной группы  $I$  соединяются в графе некоторой цепочкой шаров, сталкивающихся попарно бесконечно много раз,

то и у всех шаров существуют предельные скорости при  $t \rightarrow \infty$ , причем все они равны между собой (как векторы) и равны векторной скорости *центра масс* рассматриваемой автономной группы  $I$ .

Перейдем поэтому в инерциальную систему координат, связанную с центром масс группы  $I$  — в ней центр масс группы  $I$  имеет нулевую скорость. Тогда скорости всех шаров группы  $I$  в выбранной системе координат стремятся к 0 при  $t \rightarrow \infty$  (к скорости центра масс группы), и, следовательно, полная кинетическая энергия  $E_I(t)$  этой автономной группы стремится к 0 при  $t \rightarrow \infty$ .

Однако в силу автономности группы  $I$  при  $t > T_0$  (напомним, что в момент  $T_0$  произошел распад всей системы  $n$  шаров на автономные группы — эти группы перестали взаимодействовать друг с другом) в ней выполнен закон сохранения полной энергии (в нашем случае он совпадает с законом сохранения полной энергии поступательного движения):  $E_I(t) = \text{const}$  при  $t > T_0$ . Но поскольку  $E_I(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , имеем  $\text{const} = 0$ ; значит, с момента  $T_0$  все шары группы  $I$  имеют **т о ж д е с т в е н н о** нулевую скорость в системе центра масс.

Поэтому с момента  $T_0$  в группе  $I$  не происходит **н и о д н о г о** столкновения, что противоречит тому, что их в группе  $I$  бесконечно много при  $t > T_0$ .

Следовательно, предположение, что в автономной группе может быть **б о л ь ш е о д н о г о** шара, противоречиво, откуда вытекает, что автономных групп с момента  $T_0$  ровно  $n$  — по одному шару в каждой. Это означает, что с момента  $T_0$  все шары движутся равномерно и прямолинейно. Теорема 2 доказана.

Итак, шары в пространстве после конечного числа ударов перестают сталкиваться.

**З а д а ч а 21.1.** Может ли система шаров в каком-либо сосуда вести себя следующим образом: с некоторого момента шары перестают сталкиваться со стенками сосуда (а сталкиваются **т о л ь к о** между собой)?

Имеется *гипотеза* (ее доказательство интенсивно разрабатывается математиками в последнее время), что это число ударов меньше некоторой величины  $N_0$ , не зависящей от начальных положений и скоростей шаров (при фиксированной полной энергии системы), т. е. имеет место **р а в н о м е р н а я** по начальным условиям оценка числа ударов. Более общая гипотеза: в многогранном «ненулевом» угле с выпуклыми внутрь стенками (т. е. во внешности к выпуклым телам пространства, имеющим общее непустое

пересечение) также имеет место равномерная оценка: бильярдная частица испытывает от стенок угла отражения, число которых не превышает числа  $N_0$ , не зависящего от начального состояния частицы (из второй гипотезы не трудно вывести гипотезу о шарах).

Из этих гипотез можно получить, что если газ из  $n$  молекул (шаров) находится в сосуде, имеющем вид параллелепипеда или другого многогранника, или в сосуде с выпуклыми внутрь стенками (среди которых могут быть и плоские стенки), то число столкновений молекул газа друг с другом и со стенками за время  $t$  не превосходит  $c_1 t + c_2$ ,

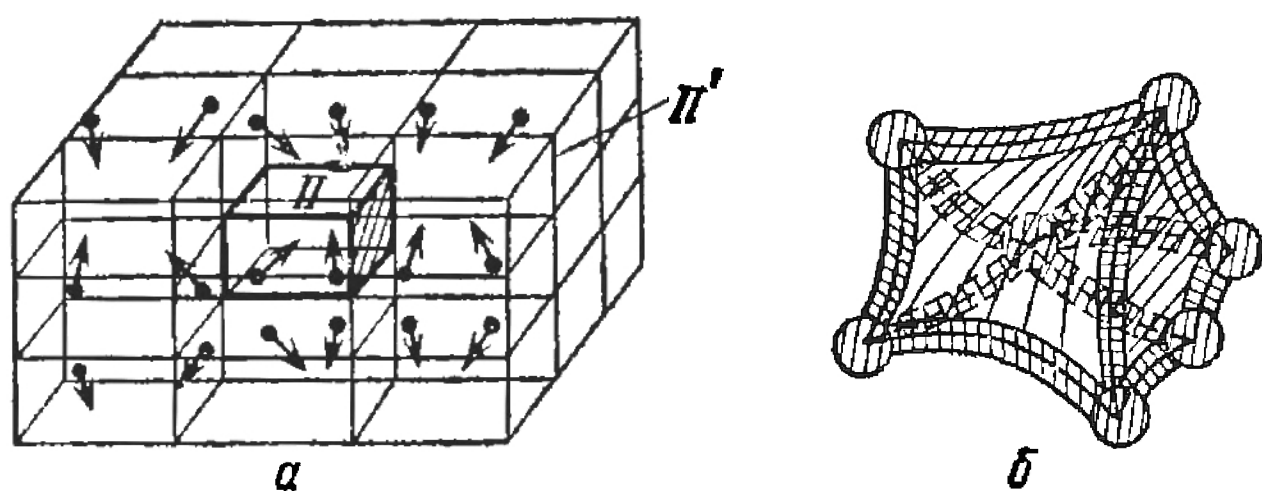


Рис. 21.7

где  $c_1$  и  $c_2$  — некоторые постоянные, зависящие только от кинетической энергии  $E$  системы и геометрии сосуда.

Например, для параллелепипеда надо поступить точно так же, как и при доказательстве теоремы 2 § 17: отразить параллелепипед  $\Pi$  симметрично относительно всех своих граней, ребер и вершин вместе с содержащимся внутри него «газом», получив новый параллелепипед  $\Pi'$  с объемом и числом молекул в 27 раз большим (рис. 21.7, а). За малый промежуток времени  $\Delta t = \sqrt{m_{\min}/(2E)}$  влияние краев параллелепипеда  $\Pi'$  не будет чувствоваться внутри  $\Pi$ , и поэтому число столкновений  $n$  молекул внутри  $\Pi$  за этот промежуток не будет превосходить константы  $N_{27n}$ , которой оценивается число столкновений  $27n$  молекул во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ . За время  $t$  число столкновений поэтому не больше

$$N(t) \leq \left( \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor + 1 \right) N_{27n} \leq N_{27n} \sqrt{\frac{2E}{m_{\min}}} t + N_{27n} = c_1 t + c_2,$$

что и требовалось доказать.

В общем же случае сосуда с выпуклыми внутрь стенками (некоторые стенки могут быть и плоскими) следует по-

ступить так: в конфигурационном пространстве системы — сосуде  $\tilde{Q}$  с выпуклыми внутрь стенками — окружить его вершины, ребра и грани всех размерностей окрестностями (рис. 21.7, б), внутри которых число столкновений меньше фиксированных универсальных констант; перелет же из одной окрестности в другую длится промежуток времени, больший некоторого  $t_0 > 0$ , и поэтому число ударов при этом перелете не больше числа столкновений в системе свободных шаров в пространстве, т. е. не больше некоторой другой константы. Поэтому число ударов здесь также не превосходит  $c_1 t + c_2$ .

## БИЛЬЯРДЫ В МНОГОУГОЛЬНИКАХ И МНОГОГРАННИКАХ

Во второй части книги подробно рассматривался бильярд в прямоугольнике, и его исследование сводилось к изучению траекторий точки, движущейся по тору, — двумерной замкнутой поверхности «с одной дыркой» (поверхности бублика). Оказывается, во многих случаях изучение бильярда в многоугольниках сводится к изучению траекторий точки, движущейся по *кренделю*, — двумерной замкнутой поверхности с двумя или большим числом «дырок». Такие поверхности возникают в классической механике при рассмотрении вопросов, связанных с так называемыми интегрируемыми и почти интегрируемыми динамическими системами, и являются геометрическими следствиями законов сохранения в системе (или, как говорят механики, первых интегралов системы: на этих поверхностях некоторая функция принимает постоянное значение). У нас они естественным образом возникнут при рассмотрении динамических систем «*бильярд в многоугольнике*» и «*шары на отрезке*». Эти поверхности переходят в себя под действием фазового потока (см. § 3) и поэтому называются *инвариантными* (т. е. «сохраняющимися»).

Часть IV состоит из двух глав — 8 и 9. В гл. 8 дается подробное описание поверхностей, отвечающих бильярдам в конкретных многоугольниках, объясняется, как такие поверхности склеиваются из нескольких экземпляров многоугольника, и решается вопрос о поведении *типичных* бильярдных траекторий в рассматриваемых многоугольниках.

В гл. 9 изучаются бильярды в многоугольниках, углы которых соизмеримы с  $\pi$  — в так называемых *рациональных* многоугольниках: исследуется поведение *типичных* и *индивидуальных* (выбранных специальным образом) бильярдных траекторий. В этой же главе изучаются периодические траектории в многоугольниках и многогранниках.



В этой главе исследуются бильярды в так называемых торических многоугольниках, отличных от прямоугольника, но сводящихся к изучению торических обмоток (§ 22), а также бильярды в многоугольниках, сводящихся к обмоткам более сложных поверхностей (§ 24). Описание и классификация этих поверхностей приводится в § 23.

## § 22. Бильярды в «торических» многоугольниках

Пусть  $Q$  — многоугольник на плоскости. Задача, которую мы решаем, — как можно более подробно исследовать поведение траекторий бильярда в многоугольнике  $Q$ . Траектории бильярда, рано или поздно попадающие в одну из вершин многоугольника  $Q$ , мы называем *особыми* и считаем закончившимися в соответствующей вершине. В § 7 была указана процедура выпрямления любого куска особой или неособой траектории: превращение его с помощью последовательных отражений в отрезок прямой линии (см. рис 7.2). В § 9 для исследования траекторий бильярда в прямоугольнике было проведено изображенное на рис. 22.1 построение, которое состоит в частичном выпрямлении траектории с помощью отражений. При этом мы ограничиваемся **четырьмя** прямо-

угольниками — исходным прямоугольником  $Q$  и тремя прямоугольниками  $Q_{10}$ ,  $Q_{01}$ ,  $Q_{11}$ , получающимися из  $Q$  отражениями относительно двух его сторон и их общей вершины. Как только выпрямленный кусок траектории  $MM'$  пересекает границу большого четырехугольника  $\tilde{Q} = AA_1A_2A_3$ , выходящий из  $\tilde{Q}$  луч  $P_1M'$  мы переносим параллельно — так, чтобы сторона  $A_1A_2$  совместилась со стороной  $AA_3$ ; иначе говоря, из полученной (переносом из точки  $P_1$ ) на отрезке  $AA_3$  точки  $P'_1$  мы проводим луч  $P'_1P_2$  в том же направлении, что и исходный луч  $MM'$ . Далее, переносим точку  $P_2$  со стороны  $A_3A_2$  в соответствующую точку  $P'_2$

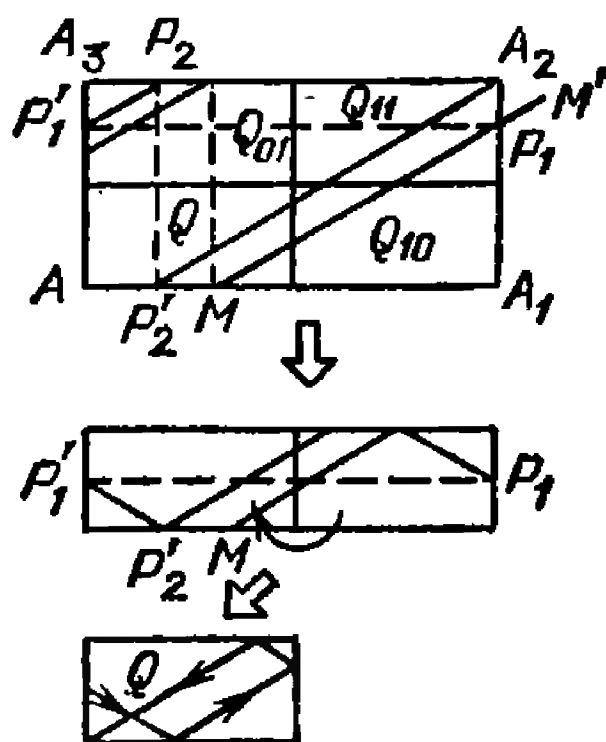


Рис. 22.1

на стороне  $AA_1$  и проводим через  $P'_2$  следующий отрезок траектории — в том же направлении.

С одной стороны, если с помощью отражений наложить прямоугольники  $Q_{10}, Q_{01}, Q_{11}$  на прямоугольник  $Q$ , то отрезки  $MP_1, P'_1P_2, P'_2P_3$  и т. д. дадут на  $Q$  траекторию бильярда.

С другой стороны, чтобы траектория на большом прямоугольнике  $\tilde{Q}$  стала *непрерывной*, достаточно склеить соответствующие точки сторон  $A_3A_2$  и  $AA_1$ , а затем — сторон  $A_1A_2$  и  $AA_3$ . После склейки отрезки  $MP_1, P'_1P_2, P'_2P_3, \dots$  составят *непрерывную* кривую на торе, получающемся из  $\tilde{Q}$  в результате склейки (см. § 8). Эта кривая является *траекторией соответствующей обмотки тора*.

**Отступление.** В дальнейшем нам придется склеивать поверхности из разных многоугольников; всегда

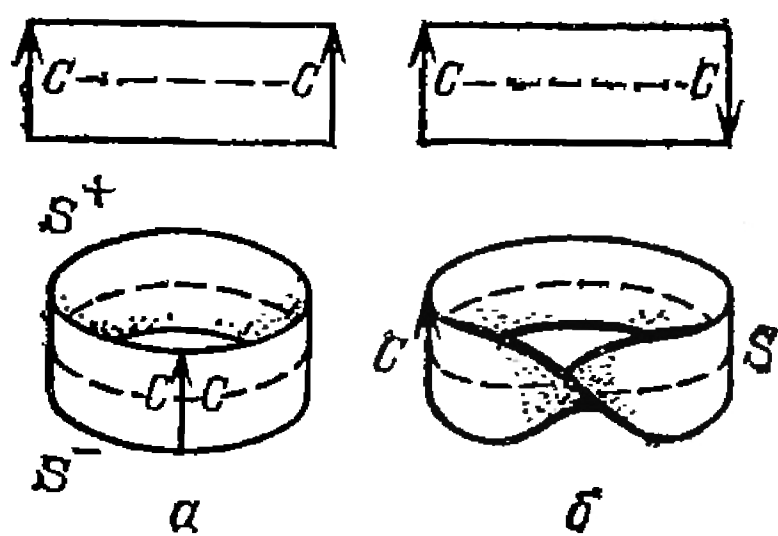


Рис. 22.2

при этом склеиваемые стороны будем обозначать одинаковыми буквами со стрелками, показывающими, в каком направлении приклеиваются стороны друг к другу. В принципе, можно пару сторон  $c$  и  $\bar{c}$  приклеить друг к другу в двух направлениях (рис. 22.2, а и 22.2, б): в первом случае из прямоугольника

получается поверхность *цилиндра*, во втором — так называемый *лист Мёбиуса*. Это совсем разные поверхности: край цилиндра состоит из двух замкнутых кривых — «верхней»  $S^{(+)}$  и «нижней»  $S^{(-)}$ ; край же листа Мёбиуса — одна кривая  $S$ .

**Задача 22.1.** Что получится из листа Мёбиуса, если его разрезать вдоль средней линии (она помечена штриховой линией на рис. 22.2, б)?

При склейке поверхности из многоугольника полезно считать многоугольник эластичным, а траектории нарисованными на нем. Эластичность многоугольника нужна, чтобы его сжимать или вытягивать для осуществления склейки. При этом склеиваемые друг с другом стрелки можно сжимать и вытягивать одновременно, но вытягивать *совершенно одинаково* (чтобы обозначенные одной буквой точки на стрелках совпали после склейки).

Вернемся после сделанного отступления к обсуждению бильярда в прямоугольнике. Вместо того чтобы рассматри-

вать одну индивидуальную траекторию на большом прямоугольнике  $\tilde{Q}$ , состоящую из параллельных друг другу отрезков, удобнее *сразу* рассмотреть все траектории одного и того же направления — в § 9 они назывались *пучком параллельных траекторий*. Разным исходным направлениям соответствуют разные пучки. После склейки прямоугольника  $\tilde{Q}$  в тор указанным выше способом те отрезки данного направления, которые лежат на одной траектории, автоматически подклеятся друг к другу. В этом и состоит некоторое преимущество рассмотрения целого *пучка траекторий*. После склейки разные пучки параллельных траекторий дадут разные обмотки тора (§ 9). Напомним полученные в § 8 сведения об обмотках торов. *Обмоткой тора* называется пучок траекторий — кривых на торе, — по которым движется точка, если ее движение складывается из равномерного вращения вдоль параллелей и равномерного вращения вдоль меридианов, характеризуемых соответствующими периодами обмотки  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1$  — время, за которое точка возвращается на те же меридианы,  $T_2$  — время возвращения на те же параллели). Если периоды  $T_1$  и  $T_2$  обмотки *соизмеримы*, т. е.  $T_1/T_2 = m/n$  — рациональное число, то движение точки *периодично* с периодом  $T = nT_1 = mT_2$  и происходит по *замкнутым* кривым на торе. В случае когда  $T_1$  и  $T_2$  *несоизмеримы*, движение *непериодично*, и каждая траектория этой (иррациональной) обмотки *всюду плотно заполняет тор*.

Найдем периоды обмоток, получающихся из соответствующих потоков бильярдных траекторий в  $\tilde{Q}$ . Если  $v_1$  и  $v_2$  — составляющие скорости движения бильярдного шара по горизонтальному и вертикальному направлениям,  $a_1$  и  $a_2$  — длины соответствующих сторон исходного прямоугольника  $Q$ , то легко видеть, что соответствующие периоды равны

$$T_1 = \frac{2a_1}{v_1}, \quad T_2 = \frac{2a_2}{v_2}.$$

Их отношение есть  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{v_2}{v_1} \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол траекторий пучка с горизонтальным направлением  $AA_1$ . Если  $\frac{a_1}{a_2} \operatorname{tg} \alpha$  иррационально, то траектории бильярда всюду плотно заполняют прямоугольник; в противном случае траектории бильярда периодичны (это следует из сформулированного свойства обмоток тора и из способа получения бильярдных траекторий из траекторий на  $\tilde{Q}$ ).

В § 13 было дано решение задачи о бильярде в прямоугольном треугольнике с острым углом  $\varphi = \pi/4$ . Именно рассматривался пучок параллельных траекторий в квадрате  $\tilde{Q}$ , составленном из восьми экземпляров треугольника  $Q$  — из  $Q = Q_8$  и  $Q_1 \div Q_7$ , получающихся из  $Q$  отражениями (рис. 22.3). Если траектория  $MP_1$  выходит из квадрата  $\tilde{Q}$ , то ее продолжение  $P_1M'$ , лежащее, например, в треугольнике  $Q'_3$  (см. рис. 22.3), следует пере-

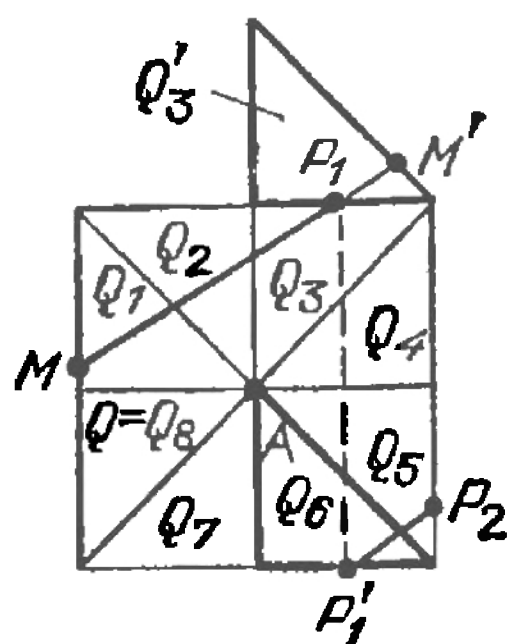


Рис. 22.3

нести в треугольник  $Q'_3$ : треугольник  $Q'_3$  получается из  $Q_3$  параллельным переносом, и нет необходимости рассматривать продолжение  $P_1M'$  траектории бильярда в этот треугольник, ибо из соответствующей точки  $P'_1$  уже проведен кусок траектории  $P'_1P_2$  данного пучка, который при соответствующих симметриях дает тот же кусок траектории бильярда в треугольнике  $Q$ , что и  $P_1M'$ . Точно так же убеждаемся, что и все прочие треуголь-

ники  $Q'_k$ , полученные из  $Q_k$  отражениями относительно сторон квадрата  $\tilde{Q}$ , получаются из каких-то треугольников набора  $Q_1, Q_2, \dots, Q_8$  параллельным переносом (например,  $Q'_1$  — из  $Q_4$ ,  $Q'_2$  — из  $Q_7$  и т. д.). Поэтому при выходе траектории за пределы  $\tilde{Q}$  нет необходимости рисовать продолжение траектории в соответствующем треугольнике  $Q'_k$  — можно перенести точку выхода  $P$  в соответствующую точку  $P'$  противоположной стороны квадрата  $\tilde{Q}$  и двигаться по уже нарисованной траектории пучка параллельных траекторий. Таким образом, траектории бильярда в  $Q$  получаются из описанных траекторий потока с перескакиванием с одной стороны на противоположную в квадрате  $\tilde{Q}$  отражениями, при которых все треугольники  $Q_1, \dots, Q_7$  накладываются на  $Q$ ; чтобы сделать траектории непрерывными, нужно склеить противоположные стороны квадрата, как указано на рис. 22.4. Отметим, что правило склейки выбирается не произвольным образом, а в соответствии с естественной процедурой выпрямления траектории бильярда. На торе получаем обмотку; если  $(v_1, v_2)$  — составляющие скорости бильярдного шара вдоль горизонтального и вертикального катетов треугольника, а длины катетов равны  $a$ , то периоды обмотки равны  $T_1 = 2a/v_1$ ,  $T_2 = 2a/v_2$ ,  $T_1/T_2 = v_2/v_1$  и из свойств обмотки тора получаем:

Если отношение  $v_2/v_1$  рационально, то траектория бильярда периодична в треугольнике  $Q$ , в противном случае траектория всюду плотно заполняет весь треугольник  $Q$ .

Заметим, что, как и в случае бильярда в прямоугольнике, в рассмотренном случае особые траектории, попадающие в вершины треугольника, можно естественным обра-

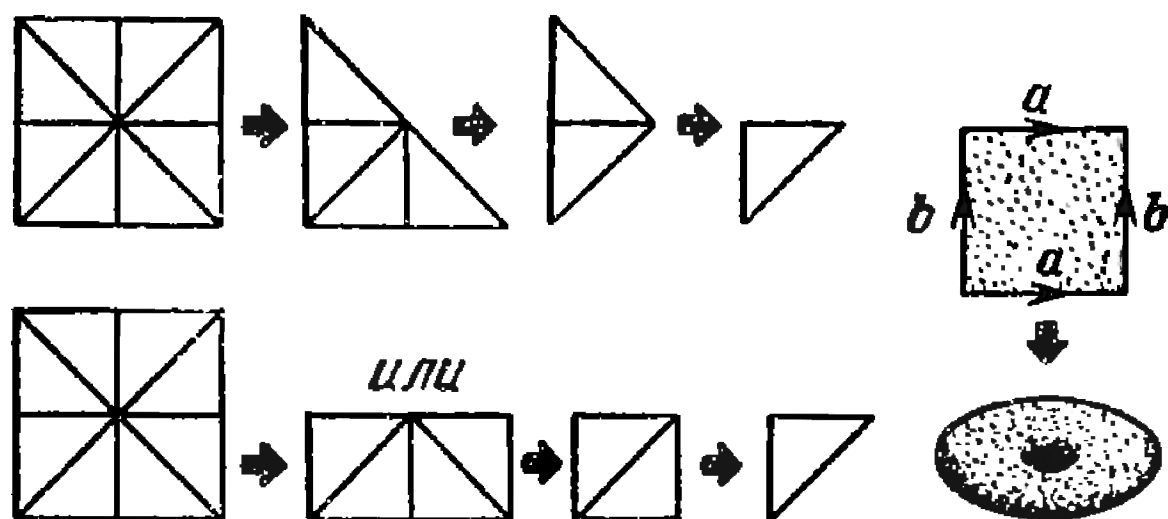


Рис. 22.4

зом продолжить за вершины — на рис. 22.5 показано, как продолжить траекторию, попадающую в точку  $A$  — вершину угла  $\pi/4$ . Будучи таким образом продолжены, особые траектории ничем не отличаются от неособых после склеивания квадрата в тор.

Исследуем теперь бильярд в *равностороннем* треугольнике  $Q$ . Рассмотрим в нем пучок параллельных траекторий.

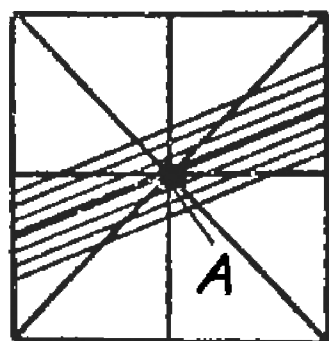


Рис. 22.5

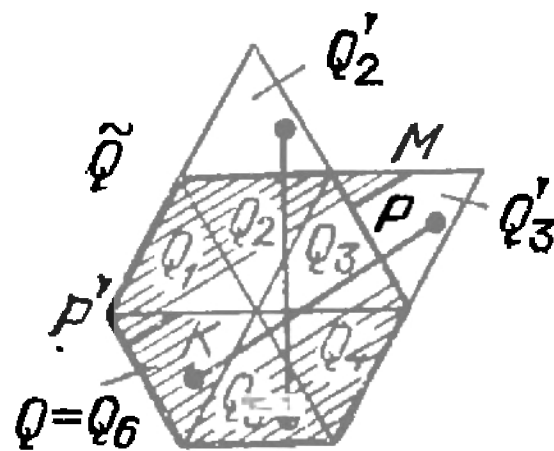


Рис. 22.6

Построим с помощью отражений еще пять таких же треугольников —  $Q_1 \div Q_5$ ; они вместе с  $Q=Q_6$  образуют правильный шестиугольник  $\tilde{Q}$  (рис. 22.6). Распространим пучок параллельных траекторий на весь этот шестиугольник. При выходе траектории из пределов  $\tilde{Q}$  продолжение траекторий следовало бы рисовать в симметричных треугольниках  $Q'_k$ , но они получаются из  $Q_1 \div Q_6$  параллельными переносами (например,  $Q'_2$  — из  $Q_5$ ,  $Q'_3$  — из  $Q_6$  и т. д.), и поэтому вместо отрезка траектории  $PM$ , выходящего из  $\tilde{Q}$ , достаточно рассмотреть уже нарисованный отрезок  $P'K$

внутри  $\tilde{Q}$ , где точка  $P'$  — соответствующая точке  $P$  точка противоположной стороны шестиугольника  $\tilde{Q}$ . Таким образом, если считать, что движущаяся точка, доходя до стороны  $s$  шестиугольника  $\tilde{Q}$ , мгновенно перескакивает в такую же точку на противоположной стороне  $s'$  шести-

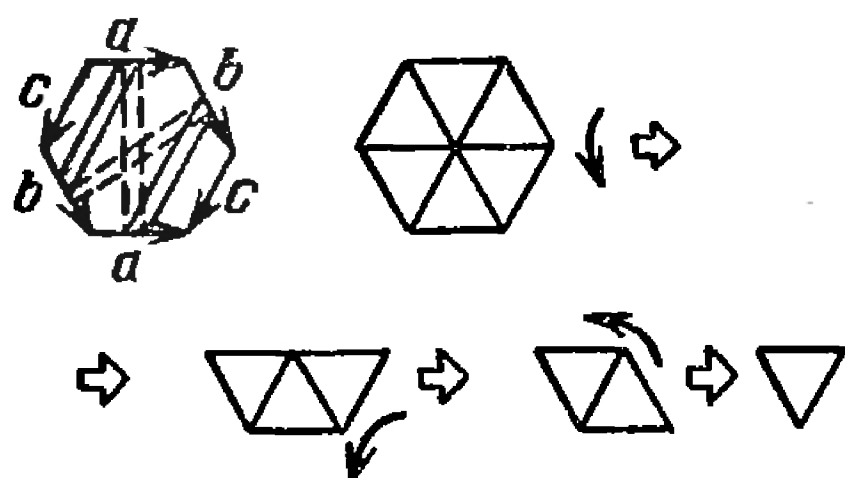


Рис. 22.7

угольника и продолжает двигаться в том же направлении, то получающиеся траектории (последовательности параллельных отрезков  $MP_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots$ ) при наложении с помощью симметрий всех составляющих шестиугольник  $\tilde{Q}$  треугольников на треугольник

$Q=Q_0$  (рис. 22.7) в треугольнике  $Q$  дают траектории бильярда. С другой стороны, «закон перескакивания» дает правило попарной склейки сторон шестиугольника  $\tilde{Q}$ ; произведя эти склейки — см. рис. 22.8 — получим тор (что не было очевидно с самого начала!). Для

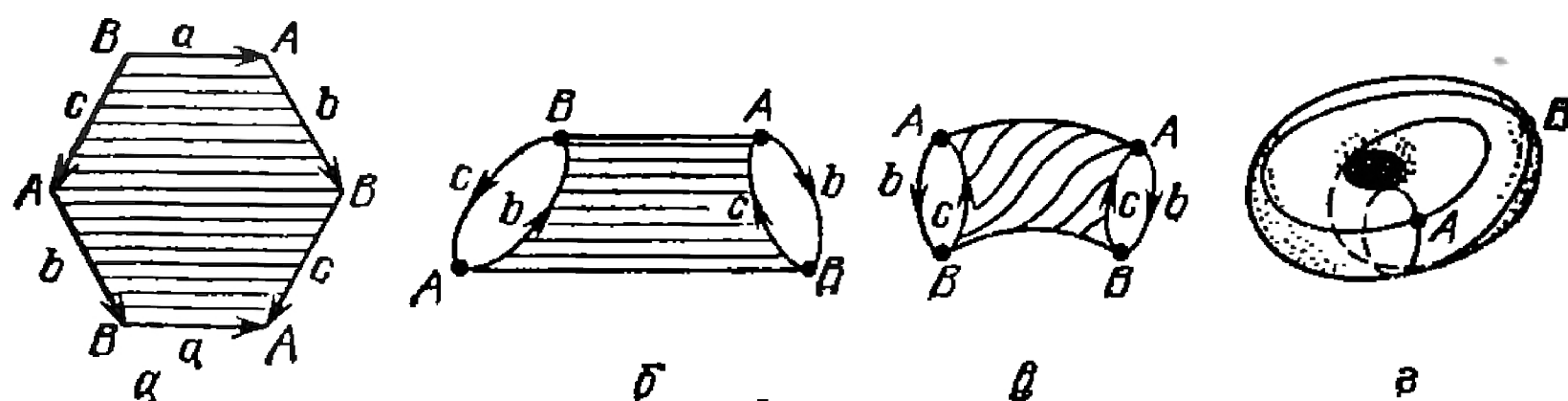


Рис. 22.8

удобства на склеиваемом шестиугольнике нанесены горизонтальные линии, а склеиваемые друг с другом вершины помечены одинаковыми буквами  $A$  и  $B$ . При склейке получаемый «по дороге» цилиндр (рис. 22.8, в) приходится «подкручивать», чтобы произвести склейку сторон  $b$  и  $c$ . Горизонтальные линии в конце концов дадут на торе не параллели, а линии обмотки типа  $(2,1)$ , т. е. замкнутые кривые, делающие два оборота вдоль параллелей и один вдоль меридианов. Пучок параллельных траекторий дает на торе семейство кривых, но получится ли *обмотка тора* — еще вопрос!

Здесь помогает другой способ склейки тора из шестиугольника  $\tilde{Q}$ . Именно, склеим пары сторон  $a, b, c$  еще на плоскости, отрезав от  $\tilde{Q}$  треугольники  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  по отрезкам

$n$  и  $m$ , и, перенося их надлежащим образом, подклеим к остатку  $\tilde{Q}$  и друг к другу (рис. 22.9, а, б). Получим ромб  $R=C_1C_2C_3C_4$  с углом  $\pi/3$ . В этом ромбе следует склеить соответствующие точки противоположных сторон  $m$  и  $m$ ,

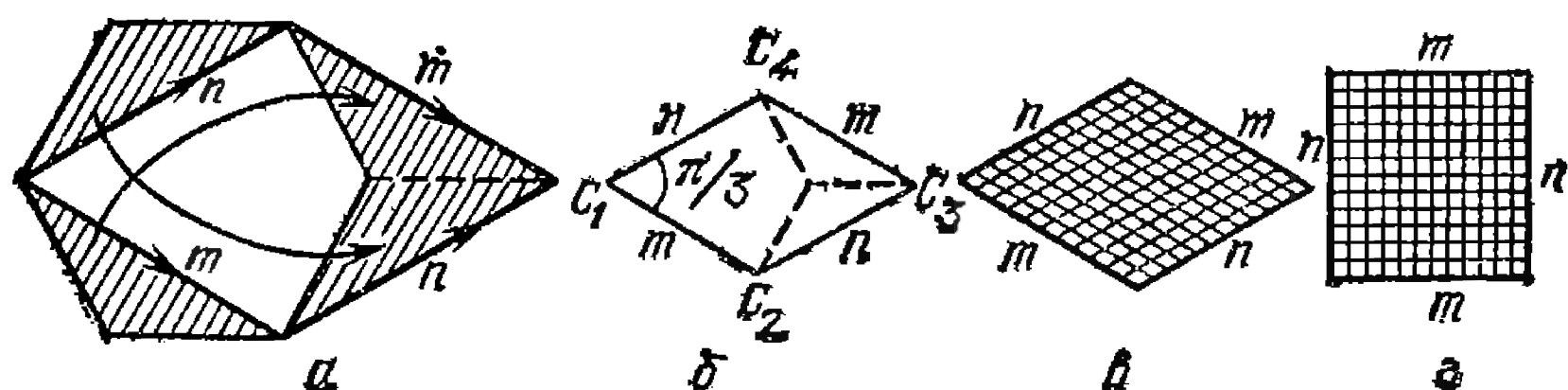


Рис. 22.9

$n$  и  $n$ , ибо мы разрезали по линиям  $m$  и  $n$ . Но это почти стандартная «модель тора», — продеформировав ромб в квадрат (рис. 22.9, в, г), мы можем склеить из него тор обычным образом. Траектории рассматриваемого пучка в ромбе устроены так же, как траектории бильярдного пучка в треугольнике, только перескакивание происходит параллельно сторонам ромба.

После деформации ромба в квадрат и последующей склейки на торе получится обмотка. Найдем ее периоды.

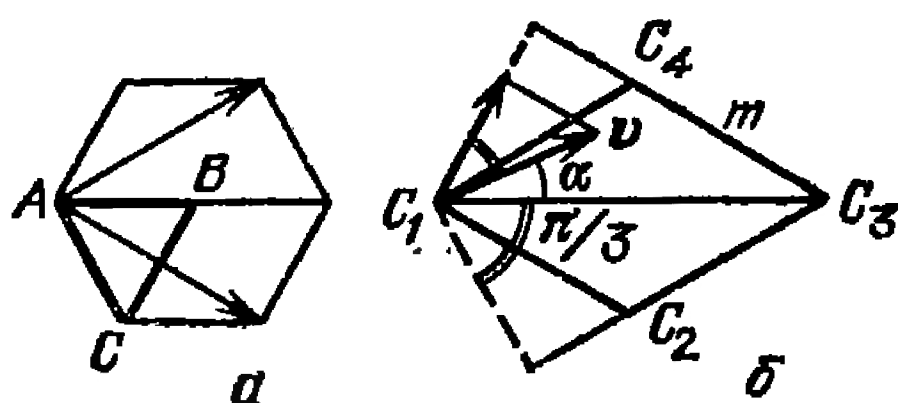


Рис. 22.10

Период  $T_1$  вдоль параллелей равен времени, которое требуется бильярдному шару, чтобы пройти один раз вдоль меридиана  $n$ , т. е. от одной стороны ромба  $m$  до другой стороны  $m$ . Если модуль скорости шара равен  $v$ , а ее направление образует угол  $\alpha$  со стороной  $AB$  исходного треугольника  $Q=ABC$  (рис. 22.10), т. е. с диагональю ромба  $C_1C_3$ , то проекция скорости на направление, перпендикулярное сторонам  $m$  —  $C_1C_2$  и  $C_3C_4$ , равна  $v \cos(\pi/3 - \alpha)$ . Если расстояние между сторонами ромба равно  $a$ , то  $T_1 = a/[v \cos(\pi/3 - \alpha)]$ . Аналогично находим  $T_2 = a/[v \cos(\pi/3 + \alpha)]$ .

Итак,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\cos(\pi/3 + \alpha)}{\cos(\pi/3 - \alpha)},$$

и мы видим, что опять траектории бильярда периодичны или всюду плотны в зависимости только от направления тра-



ектории. Поскольку  $\cos\left(\frac{\pi}{3} \pm \alpha\right) = \frac{1}{2} \cos \alpha \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$ ,

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= \frac{\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha} = \frac{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= 1 - 2 \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha} = 1 - \frac{2}{1 + (\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha)^{-1}}, \end{aligned}$$

а это число рационально или иррационально в зависимости от того, рационально или иррационально число  $k = \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$ .

Подведем итоги. Если описанными выше построениями бильярд в многоугольнике  $Q$  можно свести к обмоткам тора, то многоугольник  $Q$  будем называть торическим. Для бильярда в торическом многоугольнике  $Q$  выполнена следующая альтернатива:

*либо траектория периодична;*

*либо траектория всюду плотно заполняет весь многоугольник  $Q$ .*

В рассмотренных примерах тот факт, какая часть альтернативы имеет место, зависит лишь от направления движения бильярдного шара, но не от его начального положения.

Для любого торического многоугольника проблема бильярда может быть разрешена (т. е. все траектории могут быть классифицированы в указанном смысле).

Какие еще многоугольники, кроме рассмотренных трех типов, являются торическими? Оказывается, торическим является лишь еще прямоугольный треугольник с острыми углами  $\pi/6$  и  $\pi/3$  (половина равностороннего треугольника). Справедлива

**Т е о р е м а 1.** *Бильярды в многоугольниках, отличных от указанных четырех типов (прямоугольник и треугольники с углами  $\pi/2$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/4$ ;  $\pi/3$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/3$ ;  $\pi/2$ ,  $\pi/6$ ,  $\pi/3$ ) нельзя свести к обмоткам торов.*

Мы приведем доказательство этой теоремы в конце следующего параграфа.

**З а д а ч а 22.2.** Свести бильярд в прямоугольном треугольнике с углами  $\pi/6$  и  $\pi/3$  к обмоткам торов (осуществив построения, аналогичные проводившимся выше).

**З а д а ч а 22.3** (см. § 24). Провести построения, аналогичные проводившимся выше, для случая прямоугольного треугольника с углами  $\pi/8$  и  $3\pi/8$ : свести бильярд к пучкам параллельных траекторий с перескакиваниями. Затем осуществить склейку сторон, соответствующую получающимся перескакиваниям и убедиться, что полученная поверхность не является тором, т. е. треугольник с углами  $\pi/2$ ,  $\pi/8$ ,  $3\pi/8$  — не торический.

В заключение рассмотрим еще одну занимательную картинку, относящуюся к бильярду в равностороннем треугольнике  $Q=ABC$ . Именно рассмотрим в  $Q$  пучок траекторий, параллельных стороне  $AB$ . Чтобы нарисовать продолжение этих траекторий, не нужно производить отражения относительно стороны  $AB$  (ибо траектории ее не пересекают), а достаточно продолжить траектории в два треугольника  $Q_1$  и  $Q_2$ , образующих вместе с  $Q$  трапецию  $\tilde{Q}=ACA'C'$  (рис. 22.11). Траекторию  $MP$ , выходящую из трапеции в точке  $P$ , следовало бы продолжить в треугольник  $Q'_2$ , но после последовательных отражений отрезок  $PM'$  дает в исходном треугольнике уже нарисованный там отрезок  $P'N$ ; согласно нашим правилам мы будем считать, что

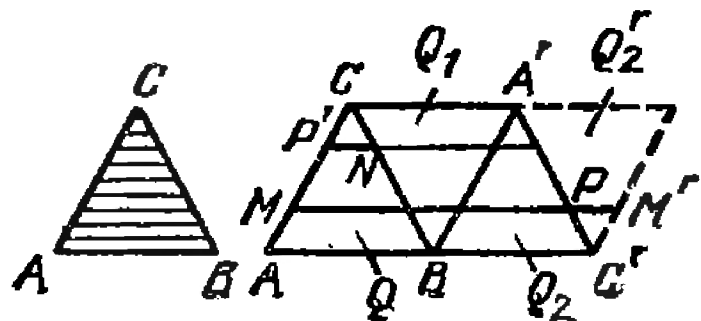


Рис. 22.11

двигущаяся по  $MP$  точка, дойдя до  $P$ , перескакивает в точку  $P'$  и продолжает двигаться по трапеции в том же направлении. Иначе говоря, параллельный пучок на трапеции следует интерпретировать как пучок с перескакиванием со стрелки  $a$  в соответствующую точку стрелки  $a'$  (рис. 22.12). Чтобы траектории стали непрерывными, стрелки нужно склеить

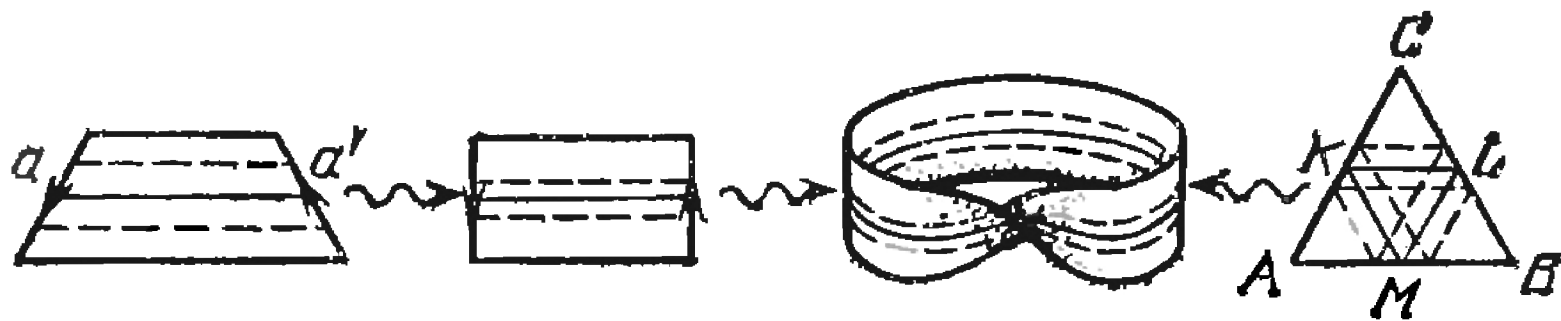


Рис. 22.12

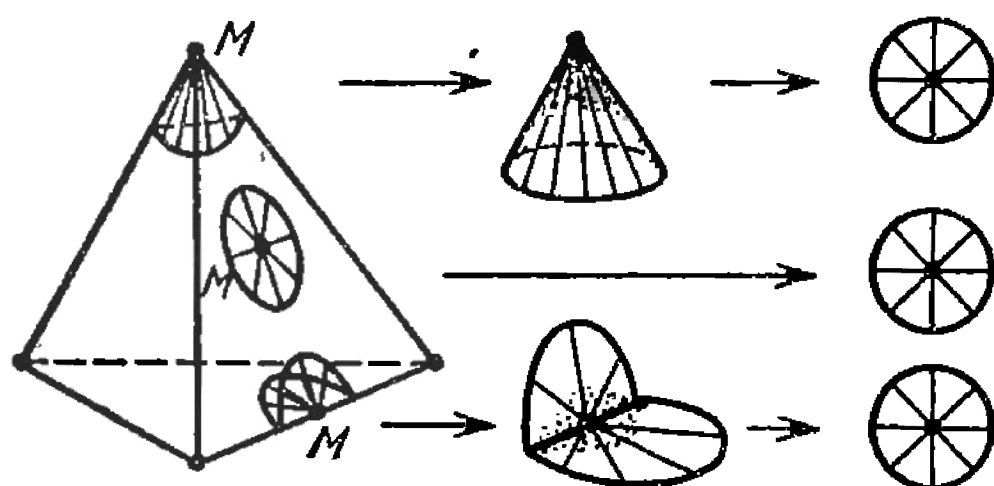
(в указанном направлении!). После склейки мы получим лист Мёбиуса (I), а на нем — пучок траекторий, параллельных средней линии листа Мёбиуса. На исходном треугольнике  $Q=ABC$  этот пучок дает траекторию  $KLM$ , составленную из средних линий треугольника  $ABC$  (она соответствует средней линии листа Мёбиуса), и семейство «двойных» траекторий, окружающих  $KLM$ . Оказывается, при анализе задач механики могут появляться даже такие «странные» поверхности, как лист Мёбиуса. Главные же «странности» нас ждут в § 24.

Для понимания § 24 опишем предварительно (в § 23) построение двумерных поверхностей с помощью склейки многоугольников и докажем теорему классификации двумерных поверхностей.

## § 23. Склейка поверхностей из многоугольников

Замкнутая многогранная поверхность определяется в школьном учебнике геометрии как множество точек в пространстве, составленное из многоугольников и удовлетворяющее некоторым условиям.

Основное свойство такой поверхности заключается в том, что каждая ее точка  $M$  обладает *окрестностью*, которая может быть непрерывно преобразована в обычный круг с центром в точке  $M$  (рис. 23.1). Окрестностью точки  $M$  будем называть множество точек поверхности, удаленных от  $M$  не более чем на некоторое расстояние  $\varepsilon > 0$ . При наших непрерывных преобразованиях



Окрестность точки  $M$

Рис. 23.1

окрестность можно изгибать, местами сжимать или растягивать, но запрещается «склеивать» между собой ее точки и «разрывать» окрестность. Если представить себе окрестность точки  $M$  сделанной из резины, то нужное преобразование можно получить, если положить окрестность под пресс и, медленно растягивая (так, чтобы не получилось складок и разрывов), расплющить ее. Указанным основным свойством обладают не только замкнутые многогранные, но и искривленные поверхности, например сфера или тор. Если в сфере вырезать две дырки и заклеить их подходящим образом изогнутой «ручкой» — боковой поверхностью цилиндра, то получится *сфера с ручкой* (поверхность гири), которая может быть преобразована в тор сжатиями и растяжениями (рис. 23.2, а). Приклеив к сфере аналогичным образом две ручки, мы получим так называемый *крендель*, или *сферу с двумя ручками*; на рис 23.2, б эта поверхность представлена в пяти видах. Можно тем же способом построить сферу  $S(p)$  с любым числом приклеенных ручек  $p \geq 0$ ; число  $p$  называется *родом* поверхности

$S(p)$ , а саму поверхность называют иногда *кренделем с  $p$  дырками*. Легко видеть, что все сферы с ручками обладают основным свойством.

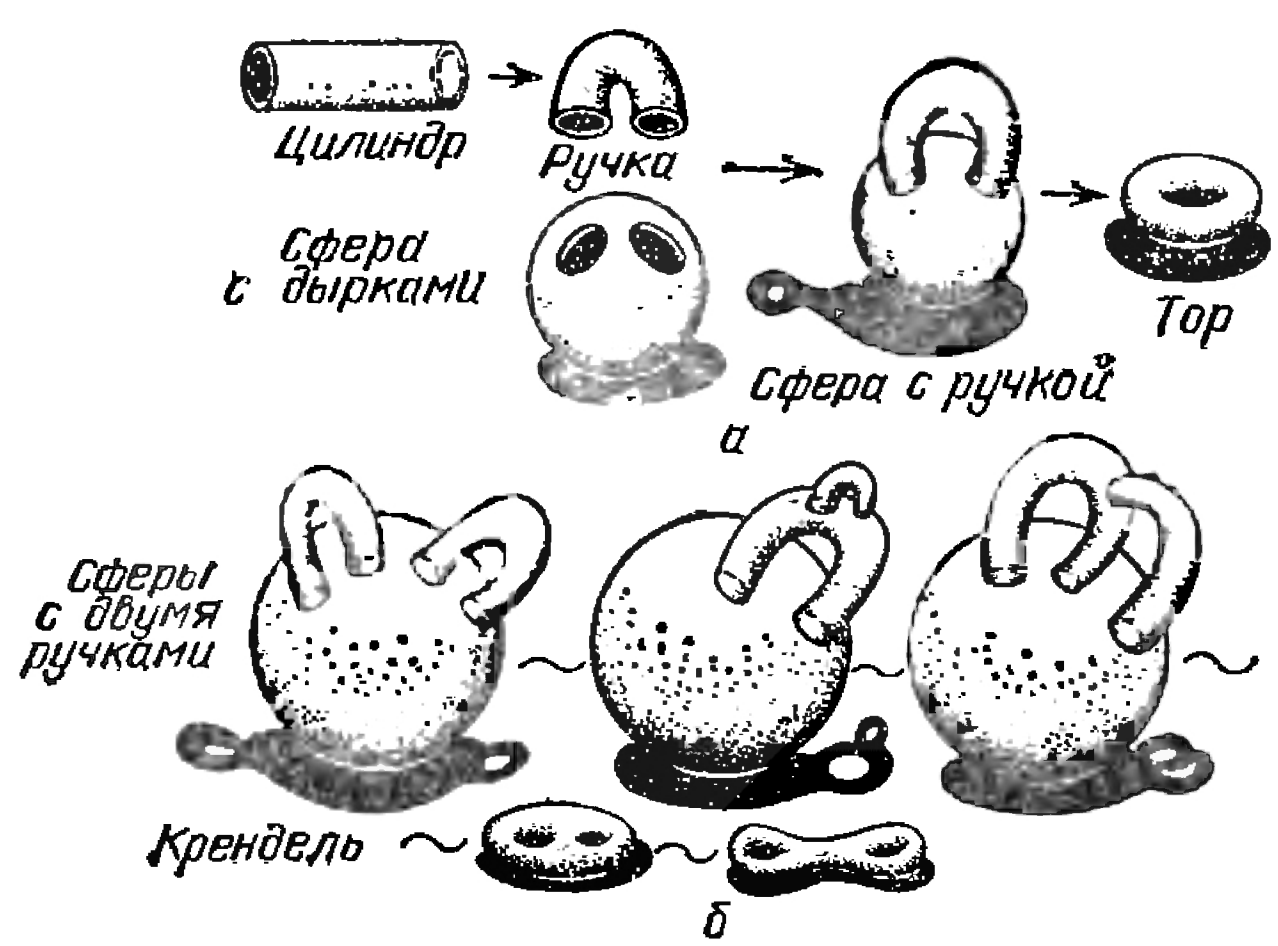


Рис. 23.2

Полная поверхность цилиндра также обладает этим свойством, а вот уже его боковая поверхность им не обладает: точки  $M$  на окружностях оснований имеют окрестности в виде искривленного полукруга — их нельзя без разрывов и склеек деформировать в круг с центром в точке  $M$  (рис. 23.3). Далее, поверхность двойного конуса и объединение двух пересекающихся сфер не обладают основным свойством, а объединение двух непересекающихся сфер обладает (рис. 23.4).

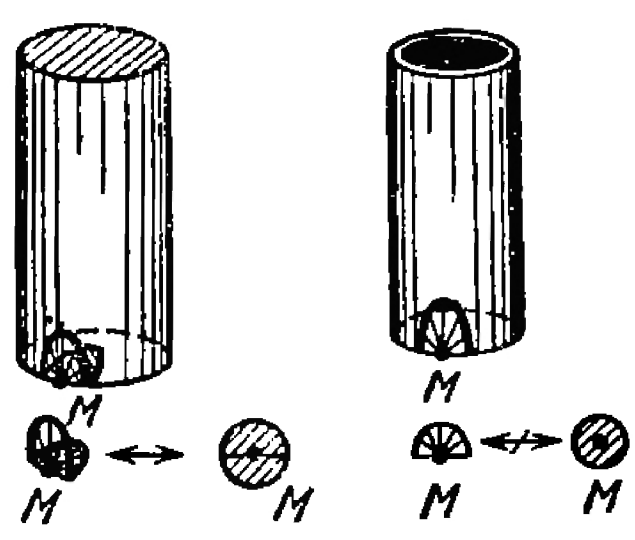


Рис. 23.3

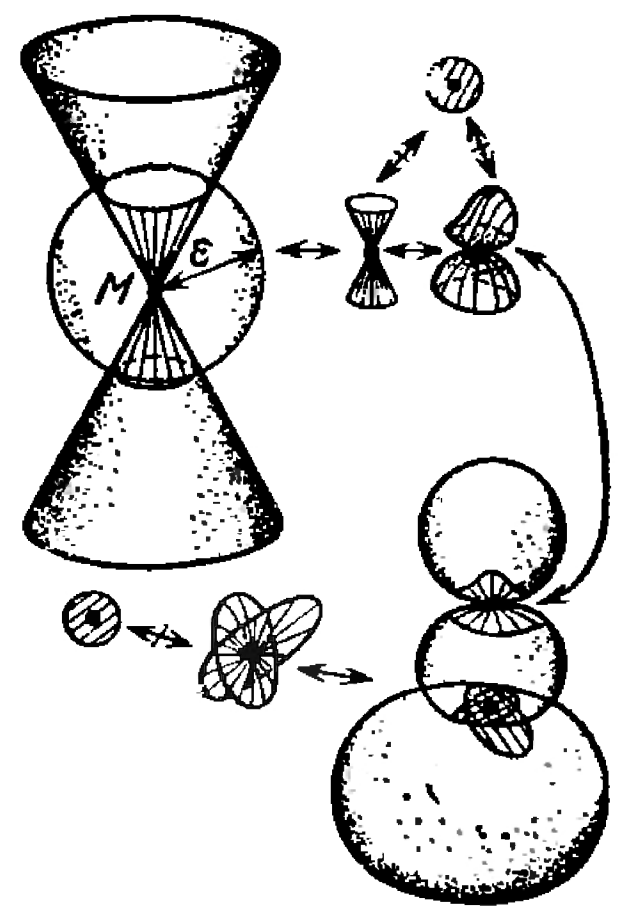


Рис. 23.4

Мы хотим исключить из рассмотрения также поверхности, состоящие из нескольких отдельных кусков. По-

требуем поэтому, чтобы любые две точки поверхности можно было соединить проходящей по поверхности непрерывной линией. Это свойство называется *связностью* поверхности. Итак, рассматриваемые в дальнейшем поверхности — *связные*.

Не будем мы рассматривать и бесконечно протяженные поверхности — такие, как плоскость или бесконечная цилиндрическая поверхность, а также поверхности типа круга без границы (*открытого круга*). Поэтому наложим еще условие *конечности*. Потребуем, чтобы поверхность можно было разбить (разрезать) на *к о н е ч н о е* число «криволинейных многоугольников», каждый из которых без разрывов и склеек можно преобразовать в плоский выпуклый многоугольник (с границами). Например, сфера по экватору и четырем меридианам разрезается на 8 криволинейных треугольников, а плоскость на конечное число многоугольников разбить нельзя. Если поверхность разбита на треугольники, любые два из которых либо имеют общую сторону, либо общую вершину, либо вообще не пересекаются, то это разбиение называется *триангуляцией* поверхности.

Итак, далее мы рассматриваем только такие поверхности (множества точек пространства), которые обладают тремя перечисленными свойствами: *основным* свойством, свойством *конечности* и *связностью*. Эти поверхности будем коротко называть *двумерными компактными поверхностями без края* (иногда слова «без края» будем опускать). Заметим, что любая рассматриваемая поверхность делит пространство на две части — внешнюю (неограниченную) и внутреннюю (ограниченную) и поэтому является *двусторонней*, а также является *ориентируемой*: любую маленькую окружность с нанесенной на ней ориентацией (стрелкой) *н е л ь з я* так подвинуть по поверхности, чтобы она вернулась на старое место, но ориентация на ней изменилась. Следует отметить, что имеются также *неориентируемые* поверхности, например лист Мёбиуса (см. рис. 22.12), имеющий *о д н у* сторону (на нем ориентацию окружности можно изменить специальным ее движением по листу — вдоль средней линии), но такие поверхности имеют *к р а й* и здесь не рассматриваются.

Две компактные поверхности считаются эквивалентными (математики говорят — *топологически эквивалентными*), если существует *о б р а т и м о е* отображение одной из них на другую, при котором нет ни разрывов, ни склеек, но допускаются растяжения и сжатия, изгибания и разги-

бания (для таких отображений в математике также есть специальное слово — *гомеоморфизм*). Например, поверхность тетраэдра эквивалентна (гомеоморфна) сфере, две последние поверхности на рис. 23.2, а эквивалентны тору, а все пять поверхностей на рис. 23.2, б эквивалентны друг другу.

**Задача 23.1.** Покажите, что сфера, тор, крендель и вообще сфера с любым числом ручек  $S(p)$  обладают свойством конечности, т. е. укажите их разбиения на конечное число криволинейных многоугольников.

**Задача 23.2.** Укажите, сфере с каким числом ручек эквивалентна: а) поверхность чашки (рис. 23.5, а); б) поверхность стула (рис. 23.5, б); в) поверхность оконного переплета (рис. 23.5, в); г) поверхность «пластилинового человечка», у которого пальцы рук образуют два сцепленных кольца (рис. 23.5, г).

**Задача 23.3\*.** Покажите, что тор и сфера не эквивалентны.

**Указание.** Придумайте такое свойство, которое сохраняется при рассматриваемых преобразованиях (гомеоморфизмах) и которым одна из этих поверхностей обладает, а другая — нет.

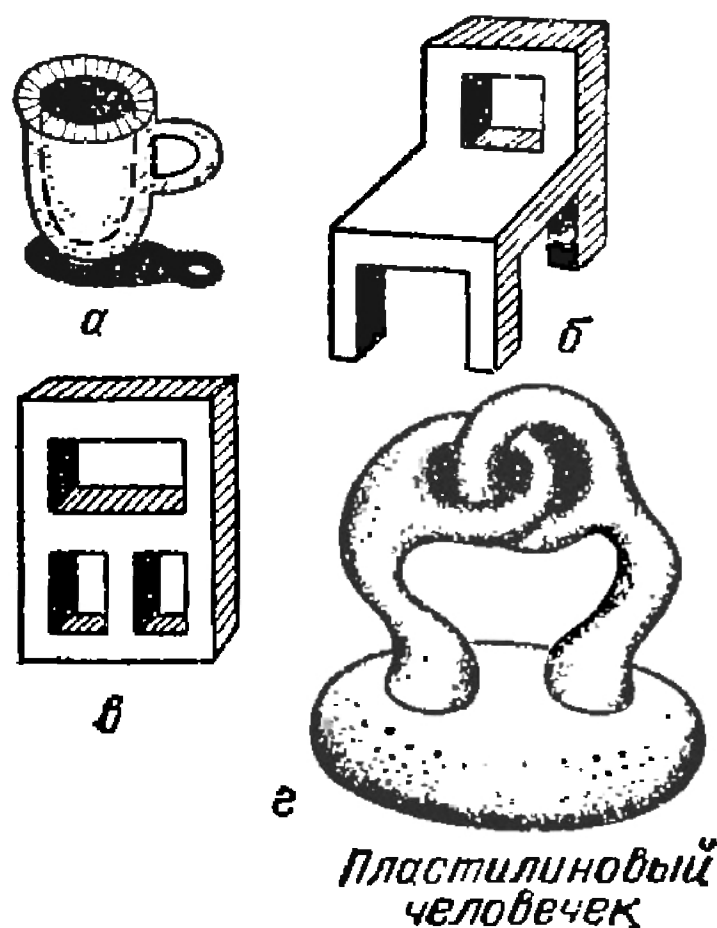


Рис. 23.5

Поверхность, обладающая свойством конечности, разрезается на многоугольники и поэтому может быть склеена из многоугольников. *Каким наименьшим числом многоугольников можно при этом обойтись?* Мы уже видели, что тор может быть получен склейкой противоположных сторон квадрата (или прямоугольника), т. е. для тора достаточно иметь *один* многоугольник. Для кренделя  $S(2)$  (т. е. для сферы с двумя ручками) достаточно также *один* многоугольник — 8-угольника (рис. 23.6). Оказывается, *любая компактная поверхность  $S$  может быть склеена из одного многоугольника  $W$* , который называется *разверткой* поверхности  $S$ . Собственно говоря, это почти очевидно, и вот почему.

Триангулируем поверхность  $S$  и каждую сторону каждого треугольника отметим какой-либо буквой, причем разные отрезки отметим разными буквами. Кроме того, каждую сторону треугольника *ориентируем*, т. е. поставим на ней произвольным образом стрелку. Разрежем поверхность  $S$  вдоль всех полученных отрезков (сторон треугольников) —  $S$  рассыпется на конечное число «кри-



вых» треугольников. Мы считаем, что разрезая поверхность вдоль какого-то отрезка, мы ставим на обоих «берегах» разреза ту букву, которая стояла на отрезке (рис. 23.7). В результате на каждой стороне треугольника будет отмечена ориентация: *сторона снабжена стрелкой*.

Наша цель: склеить обратно все это множество треугольников, но таким образом, чтобы получился один плоский многоугольник. Начнем построение с того, что

выберем какой-то треугольник  $\Delta_1$ ; рассмотрим его сторону — она снабжена какой-то буквой  $a$  и стрелкой. Так как каждая буква входит в общий набор сторон в точности два раза (посколь-

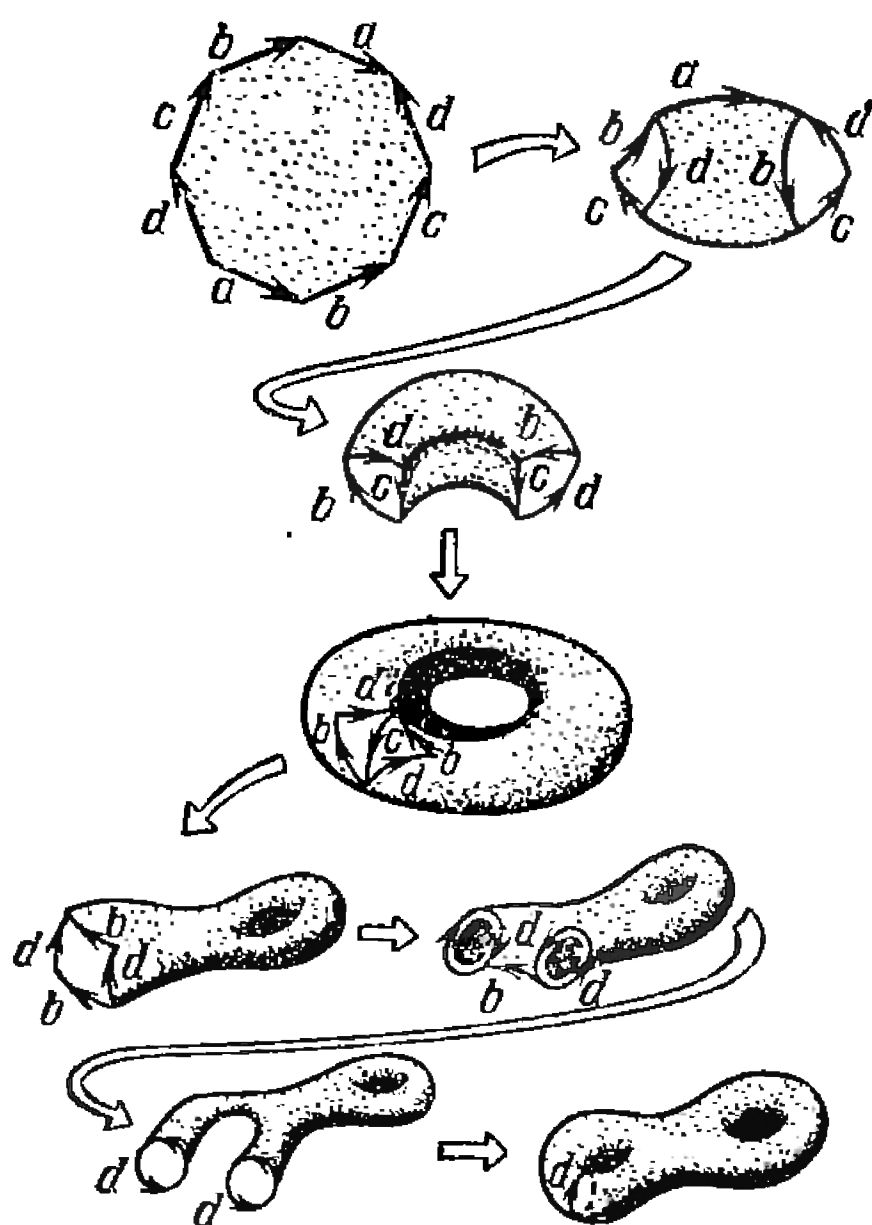


Рис. 23.6

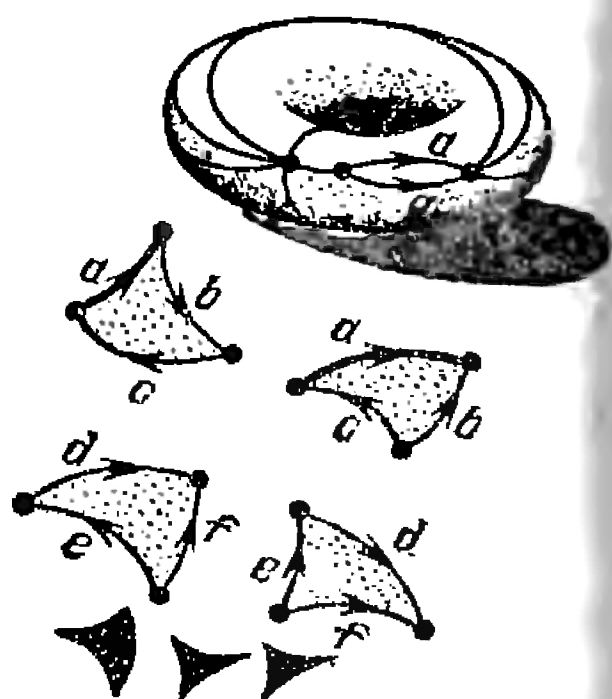


Рис. 23.7

ку поверхность  $S$  не имеет края, а каждый разрез имеет два берега), то найдется еще один треугольник  $\Delta_2$ , на стороне которого стоит та же буква  $a$ . Склеим эти треугольники по общей стороне  $a$ , совмещая направления стрелок — получится плоская фигура, разделенная на два треугольника, на границе которой стоят новые буквы и стрелки. Берем какую-то букву  $b$  на этой границе и ищем свободный треугольник  $\Delta_3$ , на стороне которого имеется та же буква  $b$  — такой треугольник обязательно найдется, причем ровно один; приклеиваем  $\Delta_3$  к этой фигуре по общей стороне  $b$ , совмещая стрелки, и т. д. Процесс закончится в тот момент, когда все треугольники будут исчерпаны. Действительно, мы приклеим в точности все треугольники — в противном случае (если никакая буква на границе получающейся области не встречается среди букв



на оставшихся еще неприсоединенных треугольниках), склеив все попарные буквы, вернемся к исходной поверхности  $S$ , и она окажется *несвязной* (состоящей больше чем из одного куска) — противоречие со свойством связности. Итак, при указанном склеивании мы исчерпаем все треугольники и получим плоский многоугольник  $W$  с буквами и стрелками на сторонах его границы, причем каждая буква будет встречаться ровно два раза, так что число сторон у  $W$  будет четным. Зафиксируем на многоугольнике  $W$  ориентацию, а затем, начав с произвольной вершины и совершая обход границы, последовательно выпишем все буквы на сторонах  $W$ , причем, если направление обхода совпадает со стрелкой на стороне, будем писать букву в степени  $(+1)$ ; если же не совпадает — пишем в показателе  $(-1)$ . В результате получится слово  $W$  вида  $W = a_{i_1}^{\pm 1} a_{i_2}^{\pm 1} \dots a_{i_k}^{\pm 1}$  (рис. 23.8), однозначно задающее многоугольник  $W$  (мы специально многоугольник и слово обозначаем одной буквой  $W$ ).

Мы сопоставили каждой поверхности  $S$  многоугольник и слово  $W$ , правда, неоднозначно (слово зависит от триангуляции поверхности). Слово  $W$  можно рассматривать как код поверхности  $S$ , и это кодирование неоднозначно: одной и той же поверхности отвечает бесконечное число кодов — по числу триангуляций на  $S$ . Если произвести требуемые склейки на границе многоугольника  $W$  (склеивая стороны с одинаковыми буквами по стрелке), то получим исходную поверхность.

Оказывается, однако, что поверхность  $S$  может быть склеена из такого многоугольника  $W$ , для которого совершенно ясно, что после склейки поверхность  $S$  будет представлять собой  $S(p)$  — сферу с  $p$  ручками. Этим многоугольником является  $4p$ -угольник с кодом  $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$ : слово  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$  отвечает *тору* — сфере с одной ручкой  $S(1)$ , слово  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$  дает склейку двух ручек, т. е. крендель  $S(2)$ ; . . .; вообще, каждая новая четверка букв  $a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}$  отвечает приклейке одной новой ручки к уже имеющейся сфере с ручками (геометрически это несложно представить, производя указанные

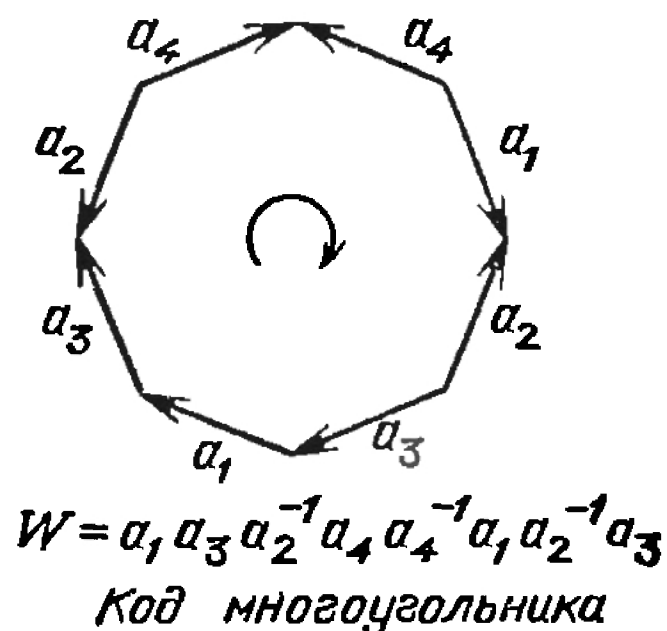


Рис. 23.8

в слове последовательные склейки). Слово  $W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$  называется *каноническим*, а отвечающий ему многоугольник  $W$  — *канонической разверткой* поверхности  $S$ . Сформулируем точную теорему.

**Т е о р е м а 1** (теорема классификации двумерных компактных поверхностей без края). *Любая компактная ориентируемая поверхность  $S$  в трехмерном пространстве эквивалентна (гомеоморфна) сфере с ручками  $S(p)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Достаточно доказать, что у поверхности  $S$  имеется канонический код  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$ .

Мы уже знаем, что поверхность  $S$  имеет *какой-то* код  $W$ , отвечающий некоторой триангуляции. Многоугольник  $W$  представляет собой плоский *четноугольник* с числом сторон  $2n$  ( $n$  не обязательно четно), все стороны которого разбиты на пары с одинаковыми буквами, и каждая пара затем склеивается так, чтобы стрелки на них совпали. При этом склеиваются и вершины, которые разбиваются на группы, внутри каждой из которых они склеиваются в одну точку (например, на рис. 23.9 все вершины шестиугольника разбиваются на две группы — черные и белые).

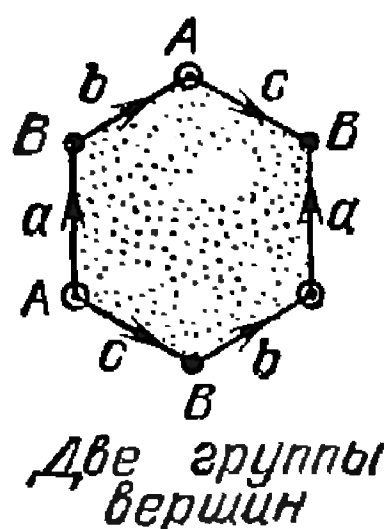


Рис. 23.9

Доказательство теоремы будет продолжаться следующим образом: будем перестраивать многоугольник  $W$  с помощью операций (разрезаний и приклеиваний), выполнение которых приводит к другому коду той же поверхности  $S$  или эквивалентной (гомеоморфной) ей; проделав все эти операции, придем в конце концов к искомому коду  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$ , отвечающему сфере с  $p$  ручками, откуда и сделаем вывод, что  $S$  гомеоморфна  $S(p)$ . Нужные нам перестройки таковы.

1°. Слово  $W$  можно перестроить так, чтобы все вершины многоугольника  $W$  склеились в одну точку.

Предположим, что количество групп склеивающихся точек больше одной. Обозначим одну из этих групп  $\{P\}$ , другую группу —  $\{Q\}$ . Тогда имеется такое ребро  $a$ , что его начало принадлежит группе  $\{P\}$ , а конец — группе  $\{Q\}$ . Выполним разрезание и последующую склейку многоугольника  $W$ , указанные на рис. 23.10. Напомним, что каждая буква на границе многоугольника встречается дважды; нас сейчас интересуют две буквы  $c$  на рисунке, которые склеим по стрелке. Результат перестройки (разрезания и склейки) — многоугольник  $W'$ , у которого вершин в мно-

жестве  $\{P\}$  стало на одну меньше, а в множестве  $\{Q\}$  — на одну больше. Взяв еще одну вершину из  $\{P\}$ , мы тоже можем уничтожить ее с помощью какой-нибудь группы (не обязательно с помощью  $\{Q\}$ ). Так будем уменьшать число вершин в группе  $\{P\}$ , пока в  $\{P\}$  не останется ровно одна вершина. Последний шаг: так как в  $\{P\}$  одна вершина, соседние ребра имеют вид  $a$  и  $a^{-1}$ . Тогда делаем перестройку, указанную на рис. 23.11 (склеиваем ребра  $a$  и  $a^{-1}$ ) и уничтожаем последнюю вершину в группе  $\{P\}$ . Такими операциями уничтожаем постепенно все группы вершин, кроме одной, вершины которой составляют полный набор вершин возникшего многоугольника и склеивают поэтому в одну точку.

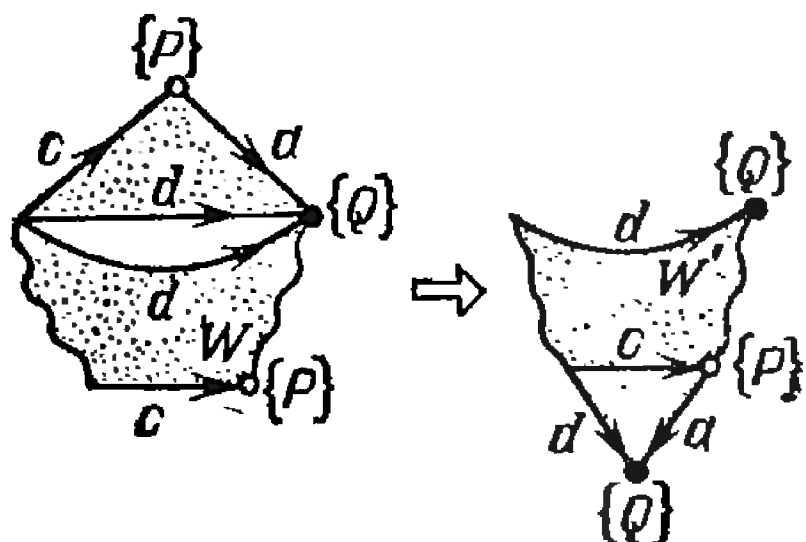


Рис. 23.10

Таковыми операциями уничтожаем постепенно все группы вершин, кроме одной, вершины которой составляют полный набор вершин возникшего многоугольника и склеивают поэтому в одну точку.

2°. Если  $W = Aaa^{-1}B$ , где  $A$  и  $B$  — слова,  $a$  — буква, то  $W$  можно перестроить в слово  $W' = AB$ . Эта операция, называемая свертыванием, показана на рис. 23.11.

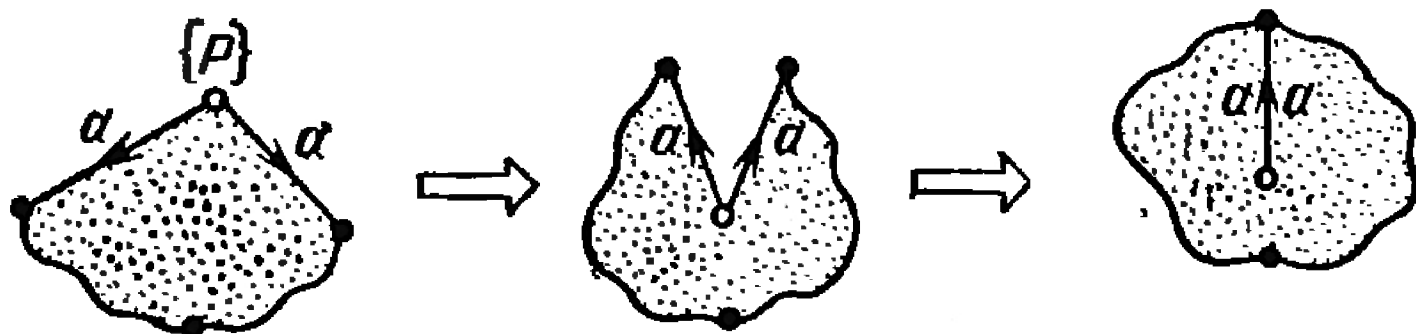


Рис. 23.11

В дальнейшем считаем, что в слове  $W$  нет сочетаний вида  $aa^{-1}$ . Заметим также, что в слове  $W$  нет и двух одинаковых букв в одинаковых степенях, т. е.  $W \neq \dots a \dots a \dots$  и  $W \neq \dots a^{-1} \dots a^{-1} \dots$ , поскольку при склейке таких двух противоположно ориентированных сторон поверхность  $S$  становится неориентируемой — существует путь, вдоль которого у окружности меняется ориентация (эта склейка эквивалентна добавлению листа Мебиуса, который мы исключили из рассмотрения). Таким образом, если в слове  $W$  встретилась буква  $a$ , то буква  $a$  встретится в  $W$  вновь лишь в степени  $(-1)$ .

3°. Если буквы  $a$  и  $a^{-1}$  не стоят рядом в слове  $W$  (что мы предположили выше), то найдутся буквы  $b$  и  $b^{-1}$  такие, то пары  $a, a^{-1}$  и  $b, b^{-1}$  разделяют друг друга (рис. 23.12, а). Тогда эту четверку можно заменить на сочетание вида  $xu^{-1}y^{-1}$ , сохраняя условия шагов 1° и 2° (рис. 23.12, б и в).

Если при этом случайно возникнут сочетания  $ss^{-1}$ , то они устраняются свертыванием.

В результате применений конструкций шагов 1°—3° мы преобразовали исходное слово  $W$  к слову  $W'$ , состоящему только из сочетаний вида  $xux^{-1}y^{-1}$ , что и требовалось доказать. Число таких сочетаний равно числу ручек у поверхности  $S$  — ее роду  $p$ .

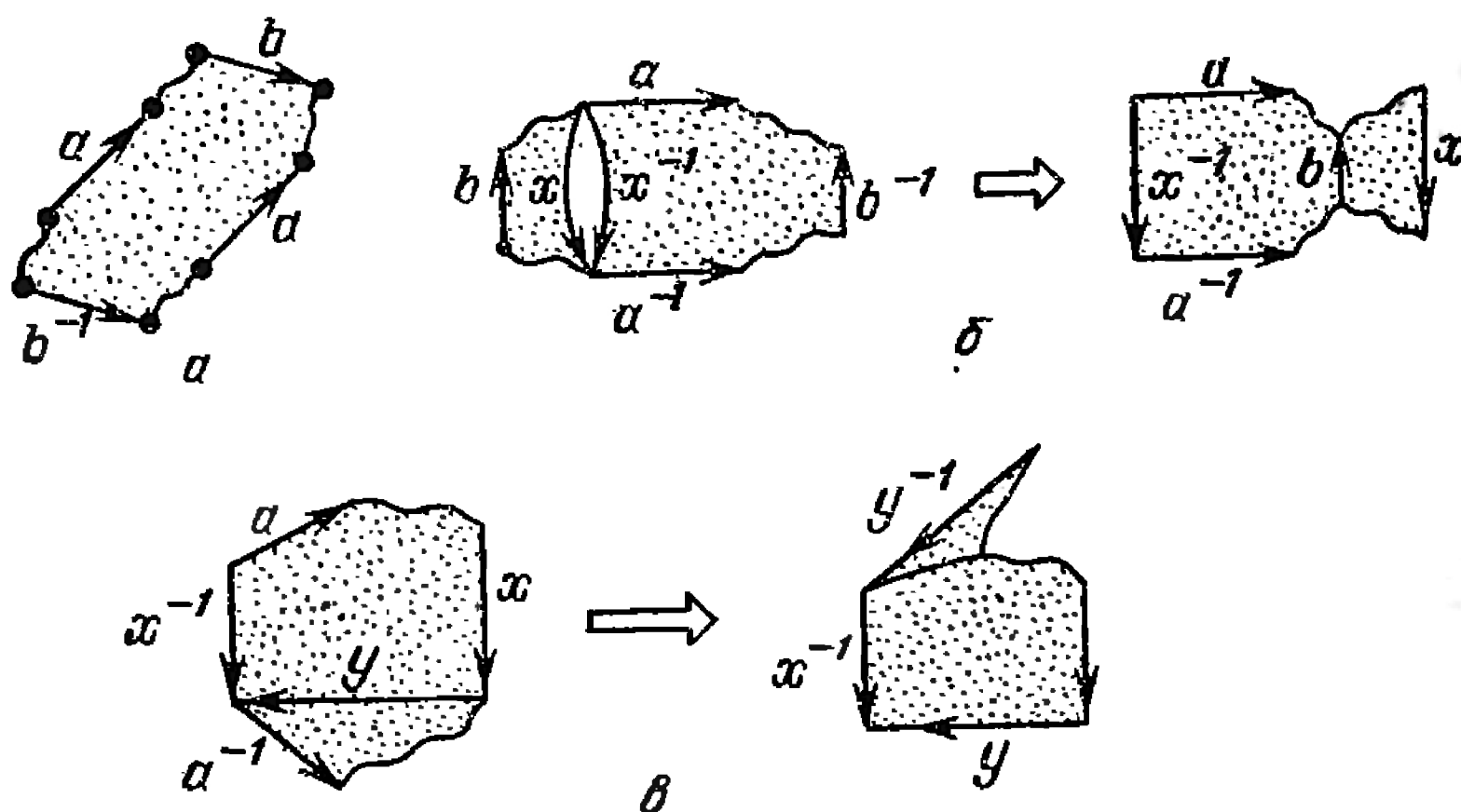


Рис. 23.12

**Задача 23.4.** Пусть поверхность  $S$  имеет код  $W = a_1 a_2 \dots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_n^{-1}$ , т. е. у  $2n$ -угольника  $W$  попарно склеиваются противоположные стороны. Определите канонический код поверхности  $S$  и ее род.

**Ответ.**  $S = S(p)$ , где  $p = [n/2]$ .

После того как мы с помощью теоремы классификации поняли, что поверхность  $S$  эквивалентна какой-то сфере с ручками, у нас может возникнуть вопрос, *нельзя ли получить для поверхности  $S$  два различных канонических кода*

$$W = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$$

и

$$W' = a'_1 b'_1 a'^{-1}_1 b'^{-1}_1 \dots a'_r b'_r a'^{-1}_r b'^{-1}_r,$$

*отвечающих сфере  $S(p)$  с  $p$  ручками и сфере  $S(r)$  с  $r$  ручками, причем  $p \neq r$ ?* Если бы два таких канонических кода имелись, то поверхности  $S(p)$  и  $S(r)$  были бы эквивалентны (гомеоморфны).

Для ответа на этот вопрос введем понятие *эйлеровой характеристики поверхности*. Если поверхность  $S$  разбита на многоугольники, и в этом разбиении имеется  $V$  вершин,

$P$  ребер и  $G$  граней (многоугольников), то число

$$\chi(S) = V - P + G$$

называется *эйлеровой характеристикой поверхности  $S$* . Если  $W$  — произвольная развертка поверхности  $S$ , то с помощью элементарных операций 1°—3° она преобразуется в каноническую развертку. Легко заметить, что эти элементарные операции не меняют числа  $\chi(S)$ . В самом деле, когда мы в многоугольнике проводим диагональ, числа  $P$  и  $G$  увеличиваются на 1, а  $V$  не меняется; когда производим разрезание вдоль проведенной диагонали с последующим склеиванием, числа  $P$  и  $G$  уменьшаются на 1 при неизменном  $V$ ; при свертывании (отбрасывании сочетания  $aa^{-1}$ ) числа  $V$  и  $P$  уменьшаются на 1, а  $G$  не меняется. Поэтому величина  $V - P + G$  во всех случаях не меняется.

Пусть теперь  $W$  — каноническая развертка  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$ . Для нее  $V=1$  (все вершины склеены в одну; см. п. 1° доказательства теоремы 1),  $P=2p$  (такое число сторон у канонической развертки) и  $G=1$  (многоугольник  $W$  — один). Получаем

$$\chi(S) = 1 - 2p + 1 = 2 - 2p.$$

Поэтому, если бы существовали два различных канонических кода  $W$  и  $W'$ , указанных выше, то мы получили бы

$$\chi(S) = 2 - 2p = 2 - 2r,$$

откуда  $p=r$  и, следовательно, слова  $W$  и  $W'$  совпадают. Следовательно, справедлива

**Т е о р е м а 2.** *Никакие две сферы с разным числом ручек не эквивалентны (не гомеоморфны).*

**З а д а ч а 23.5.** а) Докажите, что у всякого выпуклого многогранника сумма числа вершин и граней больше числа ребер на 2. б) Вычислите эйлерову характеристику тора и кренделя  $S(2)$ . в) Докажите, что для любой триангуляции любой поверхности  $V + P + G$  — четное число.

Другое доказательство теорем 1 и 2 приведено в книге: Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология. — М.: Наука, 1982 («Библиотечка «Квант», вып. 21).

Теперь, зная, как двумерные поверхности склеиваются из многоугольника, вновь вернемся к бильярдам в многоугольниках.

## § 24. Бильярды в «рациональных» многоугольниках и поверхности

Рассмотрим бильярд в прямоугольном треугольнике  $Q$  с острыми углами  $\pi/8$  и  $3\pi/8$ . Пучок параллельных траекторий в этом треугольнике продолжим до пучка в правильном восьмиугольнике  $\tilde{Q}$ , составленном из 16 треугольников, равных  $Q$  и получающихся из  $Q$  последовательными отражениями относительно катета и гипотенузы, угол между которыми равен  $\pi/8$  (рис. 24.1, а). Как и в § 22,

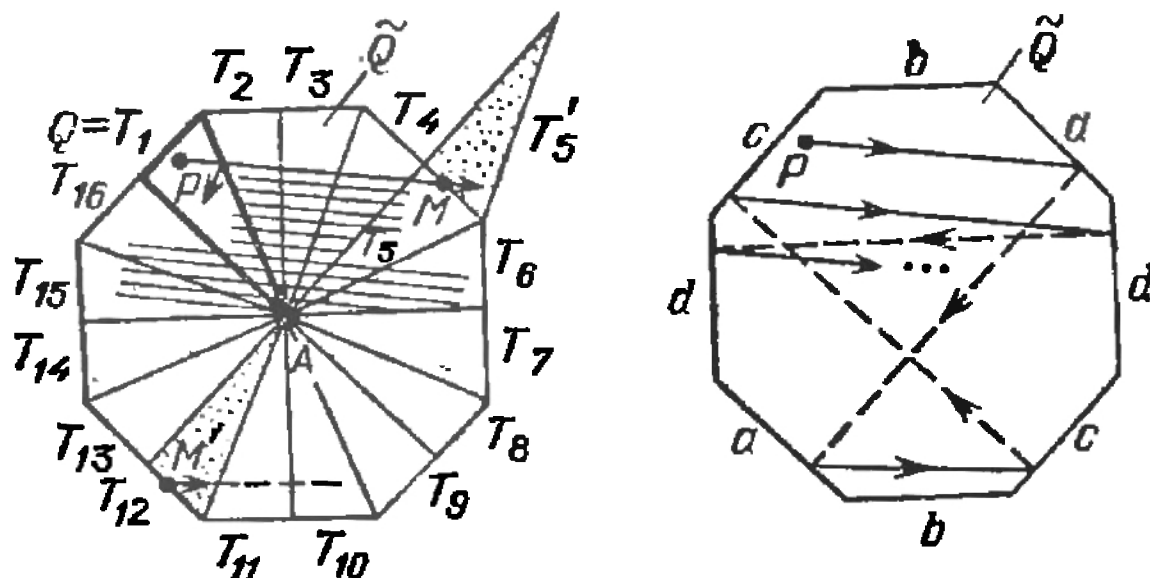


Рис. 24.1

нетрудно проверить, что траектории бильярда в исходном треугольнике  $Q$  получаются при наложении всех упомянутых треугольников на треугольник  $Q$  из траекторий точки, движущейся по нарисованным отрезкам и перескакивающей с одной стороны восьмиугольника  $\tilde{Q}$  на соответствующую точку противоположной (параллельной) стороны. Таким образом, бильярд задает склейку сторон восьмиугольника  $\tilde{Q}$ , указанную на рис. 24.1, б).

Осуществим эту склейку. Внимательно проследите за ее этапами (рис. 23.6). В результате мы получим *крендель* — описанную в § 23 поверхность, как бы склеенную из двух торов. При склейке отрезки траектории указанного выше пучка с перескакиванием подклеятся друг к другу и образуют непрерывную траекторию на кренделе. Все траектории данного пучка параллельных траекторий после склейки дадут пучок траекторий на кренделе, который мы будем называть *обмоткой кренделя*.

В отличие от обмоток тора, обмотки кренделя имеют *особые точки*; в данном случае на кренделе будет ровно одна особая точка  $A$ , к описанию которой мы и переходим. Грубо говоря, если в окрестности точки  $M$  траектории ведут себя «примерно параллельно», то такая точка  $M$  называется

неособой (рис. 24.2, а). Поведение траекторий в окрестности особых точек не такое, как на рис. 24.2, а, а «особое». Нетрудно понять, что при склейке из восьмиугольника  $\tilde{Q}$  точки в н у т р и  $Q$  будут неособыми. Если точка  $M$  на кренделе получается склейкой двух соответственных точек,  $M_1$  и  $M_2$ , лежащих на параллельных сторонах  $\tilde{Q}$ , то она также не будет особой — при подклеивании окрестностей точек  $M_1$  и  $M_2$  друг к другу мы получаем окрестность точки  $M$  на кренделе, траектории в которой ведут себя как на рис. 24.2, б. Таким образом, особая точка на кренделе может получиться лишь при склейке в е р ш и н восьмиугольника  $\tilde{Q}$ . Нетрудно проверить, что все восемь вершин  $\tilde{Q}$  дают при склейке ровно одну точку  $A$  на кренделе (это

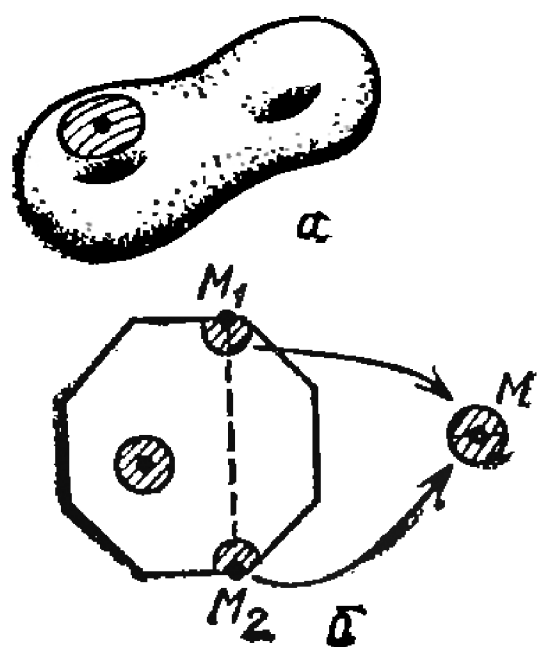


Рис. 24.2

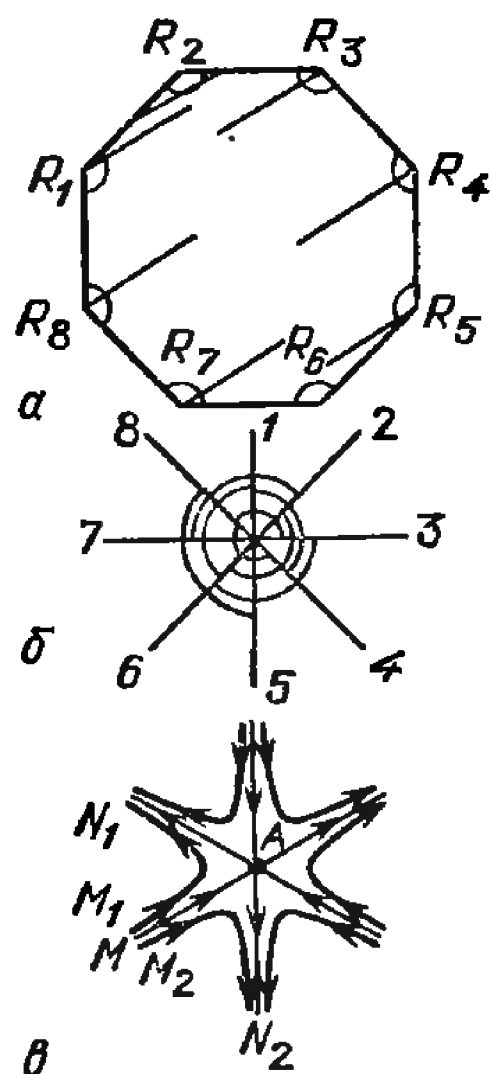


Рис. 24.3

следует из п. 1° доказательства теоремы 1 § 23). Окрестность этой точки склеивается из восьми секторов  $R_1—R_8$  — окрестностей вершин восьмиугольника  $\tilde{Q}$ . Подклеим эти секторы величиной  $3\pi/4$  каждый друг к другу в соответствии с законом склейки (рис. 24.3). Мы видим, что при такой подклейке получатся т р и слоя (так как  $8 \cdot 3\pi/4 = 3 \cdot 2\pi$ ), поэтому все секторы величиной  $3\pi/4$  каждый придется сжать в три раза, чтобы можно было осуществить склейку в о д и н слой. При этом сжатии следует считать траектории потока нарисованными на секторах — и после их склейки получится картина траекторий в окрестности точки  $A$ .



Мы увидим после осуществления подклейки (соответствующие рассуждения приведены ниже), что в точку  $A$  входят ровно три траектории, и выходят ровно три траектории. Эти траектории соответствуют особым траекториям бильярда в треугольнике  $Q$ , заканчивающимся или выходящим из вершин углов величины  $\frac{3\pi}{8}$ , — именно из этих вершин получаются восемь вершин восьмиугольника  $\tilde{Q}$ . В три вершины —  $A_3, A_4, A_5$  — траектории пучка параллельных линий входят, а из трех —  $A_1, A_7, A_8$  — выходят. После склейки входящие и выходящие траектории дают входящие в особую точку  $A$  и выходящие из нее траектории; эти особые траектории, кончающиеся и начинающиеся в  $A$ , называют сепаратрисами, т. е.

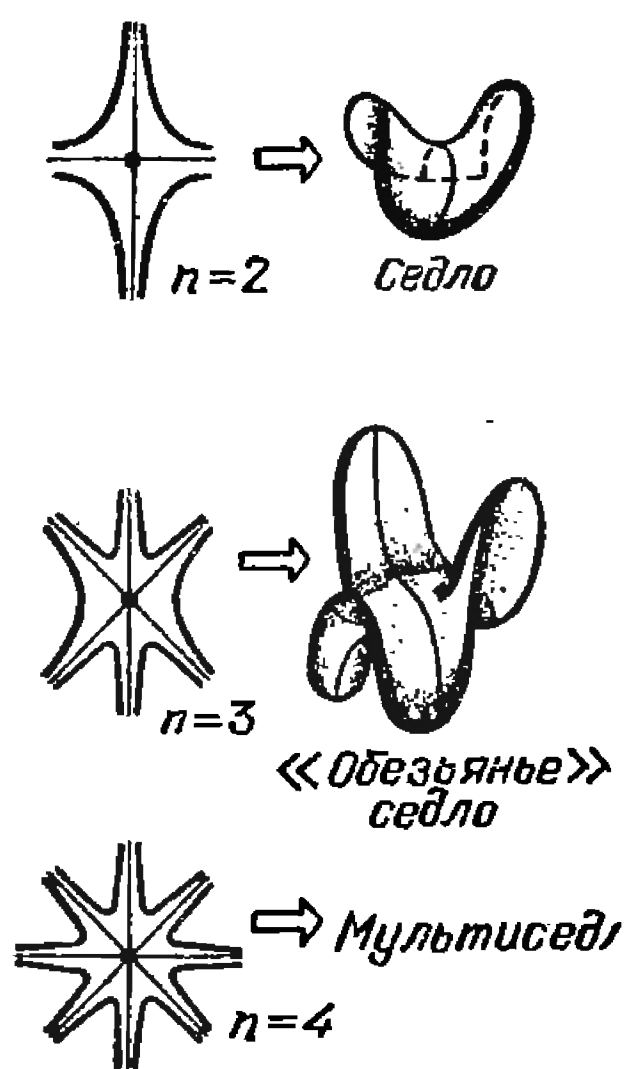


Рис. 24.4

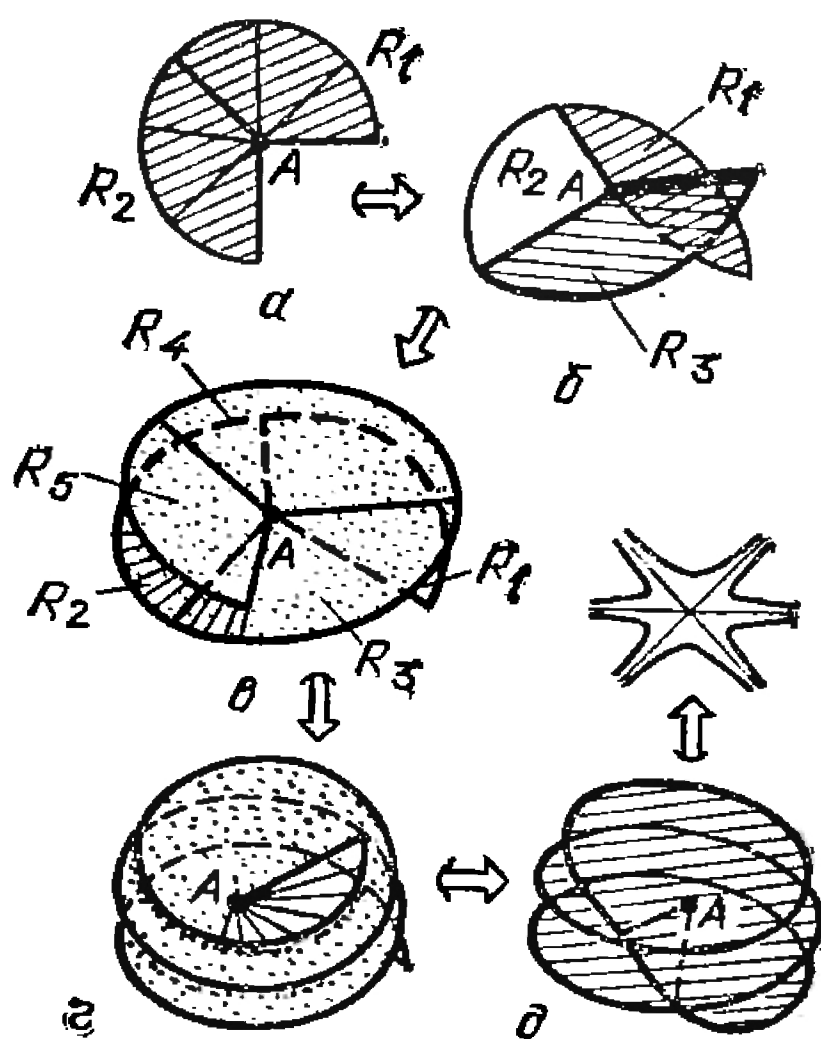


Рис. 24.5

«разделяющими». Сепаратрисы действительно как бы разделяют остальные траектории — две близкие к сепаратрисе  $MA$  траектории  $M_1N_1$  и  $M_2N_2$ , лежащие по разные стороны от  $MA$  после того, как сепаратриса заканчивается в точке  $A$ , уходят друг от друга.

Итак, бильярд в треугольнике  $Q$  с углами  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{8}$  и  $\frac{3\pi}{8}$  сводится к обмоткам кренделя. Эти обмотки имеют ровно одну особую точку  $A$ , поведение траекторий в окрестности которой описано выше.

В общем случае особые точки с таким поведением траекторий называются *мультиседлами*. Мультиседла могут иметь любое четное число  $2n$  сепаратрис —  $n$  входящих и  $n$  выходящих; единственное ограничение состоит в том, что  $n \geq 2$ . Такое мультиседло будет называться *мультиседлом типа  $n$* . Мультиседло типа  $n=2$  принято называть просто *седлом* (рис. 24.4).

Оказывается, мультиседла появляются всякий раз при исследовании поведения пучка параллельных траекторий бильярда в многоугольнике  $Q$ , близких к особым траекториям бильярда, заходящим в вершины углов многоугольника  $Q$ . Прежде чем дать некоторую общую конструкцию, приведем еще один способ построения мультиседла типа 3, появляющегося на кренделе, склеенном из правильного восьмиугольника.

Будем приклеивать друг к другу введенные выше секторы величиной  $\frac{3\pi}{4}$ , не деформируя их при этом, как делалось ранее. Углы секторов равны  $\frac{3\pi}{4}$ , и уже после приклеивания сектора  $R_2$  к сектору  $R_1$  следующий подклеиваемый к  $R_2$  сектор  $R_3$  перекрывается с  $R_1$  (рис. 24.5, а). Мы будем считать, что перекрывающаяся с  $R_1$  часть сектора  $R_3$  образует новый слой, или лист, идущий сверху над  $R_1$  (рис. 24.5, б); секторы  $R_4$  и  $R_5$ , приклеиваемые далее, тоже лежат на *втором* листе — над первым листом (рис. 24.5, в). Сектор  $R_6$  дает уже *тройное* наложение (вместе с  $R_1$  и  $R_3$ ), и мы будем считать, что секторы  $R_6$ ,  $R_7$ ,  $R_8$  идут уже по *третьему* листу. Сделав полный (тройной) оборот вокруг особой точки, мы вновь попадаем в сектор  $R_1$ , поэтому свободный край  $R_8$  следовало бы приклеить к свободному краю  $R_1$ , но для этого его нужно «продеть» через два нижних листа (рис. 26.6, а); если сделать так, то получится поверхность с самопересечением, как на рис. 24.5, д. Состоящую из трех листов окрестность точки  $A$  называют *трехлистной ветвящейся окрестностью  $A$* , а саму точку  $A$  — *точкой ветвления порядка 3*. Чтобы получить из ветвящейся окрестности точки  $A$  обычную окрестность точки  $A$  на кренделе, нужно сжать ветвящуюся окрестность в три раза так, чтобы каждый из трех листов превратился в круговой сектор с углом  $\frac{2\pi}{3}$ , а после этого подклеить друг к другу свободные края первого и последнего листов, превратившихся в секторы. Эта процедура была выполнена выше.

Поскольку при склейке секторов  $R_1—R_s$  в ветвящуюся поверхность бильярдные траектории подклеивались друг к другу и образовывали на каждом листе семейство параллельных линий одного и того же направления, то на каждом листе *р о в н о о д н а* траектория входит в точку ветвления  $A$  и *р о в н о о д н а* траектория выходит из  $A$ , причем траектории, лежащие по одну сторону от входящей в  $A$  сепаратрисы остаются на том же листе, а лежащие по другую сторону — переходят на другой лист. При указанном трехкратном сжатии ветвящейся окрестности сепаратрисы останутся входящими в  $A$  и выходящими из  $A$  лучами, а остальные траектории превратятся в идущие вдоль соответствующих сепаратрис кривые. Таким образом, после сжатия пучка параллельных траекторий на 3-листной ветвящейся окрестности точки ветвления  $A$  получится мультиседло типа 3.

Сепаратрисы, входящие в особую точку  $A$ , следует считать заканчивающимся в этой точке, ибо при выборе пути выхода бильярдного шара, движущегося по сепаратрисе, возникает несколько возможностей — каждая из выходящих из  $A$  сепаратрис ничем не хуже других. (Эту неоднозначность мы и обходим, считая, что сепаратрисы *заканчиваются* в  $A$ ; образно говоря, бильярдный шар, попав в  $A$ , сидит там и *думает*, по какому же пути ему пойти, и никак не может найти ответа. Мы бессильны помочь «думающему» шару, ибо ни из каких разумных соображений выбрать один путь из трех нельзя, и поэтому мы считаем, что шар останется в  $A$ . Обдумайте и вы эту ситуацию.)

Рассмотрим теперь *общую задачу* о поведении пучка параллельных траекторий бильярда в каком-то многоугольнике  $Q$ , близких к траектории  $MA$ , заходящей в вершину  $A$  многоугольника  $Q$ . Пусть  $U = \angle BAC$  — угол многоугольника  $Q$  при вершине  $A$ ,  $\alpha$  — величина этого угла. Попробуем, как раньше, продолжить пучок параллельных траекторий в угле  $U = U_1$  на углы  $U_2, U_3, U_4, \dots$ , получающиеся из  $U$  последовательными отражениями (эти отражения нужны для выпрямления бильярдной траектории (рис. 24.6)). Строя углы  $\{U_k\}$ , на каждом из них нарисуем пучок параллельных траекторий в том же направлении, что и в угле  $U$ . Последовательно «обкладывая» вершину  $A$  углами  $U_k$ , мы видим, что, вообще говоря, после одного «оборота» вокруг  $A$  свободная сторона  $AC$  исходного угла  $U$  вовсе не обязана совместиться с соответствующей стороной  $AC$ , какого-то из углов  $U_k$  — возможно, поверх  $U_1, U_2, \dots$  придется наложить второй слой углов  $U_k$ ; поверх второ-

го слоя может лечь третий и т. д. Рассмотрим тот случай, когда после  $m$ -кратного обкладывывания около вершины  $A$  некоторая сторона  $AC_n$  все-таки совместится с  $AC$ . Тогда наша процедура обрывается, и мы получаем  $m$ -листную ветвящуюся окрестность точки  $A$ , а также пучок параллельных

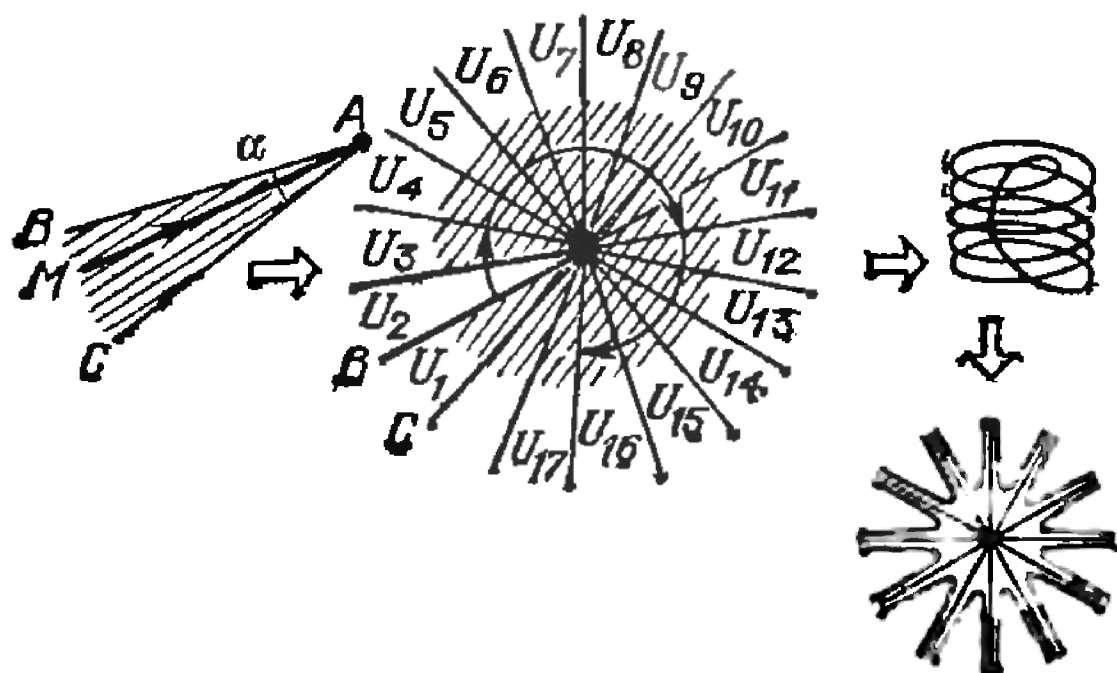


Рис. 24.6

траекторий одного и того же направления на каждом из  $m$  листов. При этом следует считать, что траектория со стороны  $AC$  исходного угла  $U$  переходит на сторону  $AC_n$  последнего из углов  $U_k$ . После  $m$ -кратного сжатия ветвящейся окрестности все  $m$  листов превратятся в  $m$  секторов величины  $2\pi/m$  каждый; подклеив после сжатия  $AC_n$  к  $AC$ , мы получим *обычную* окрестность точки  $A$ . Пучок параллельных траекторий на  $m$ -листной окрестности дает мультиседло типа  $m$  на обычной окрестности.

Заметим, что если  $AC_n$  действительно совпадет с  $AC$  и мы получим  $m$ -листную окрестность точки  $A$ , то последний из углов  $U_k$  имеет *четный* номер, ибо при последовательных отражениях стороны  $AC_k$  и  $AB_l$  чередуются (рис. 24.6). Следовательно, на  $m$  листах, составляющих вместе угол величины  $2\pi m$ , укладывается четное число  $2n$  углов  $\{U_k\}$  величины  $\alpha$ . Отсюда  $2n\alpha = 2\pi m$  и  $\alpha = \left(\frac{m}{n}\right)\pi$ . Обратно, если величина  $\alpha$  исходного угла  $U$  представляется в виде  $\alpha = \left(\frac{m}{n}\right)\pi$ , где  $m$  и  $n$  взаимно просты, то легко проверить, что после  $2n$  последовательных отражений сторона  $AC_n$  впервые совпадет с  $AC$ , а углы  $U_1, U_2, \dots, U_{2n}$  дадут  $m$ -листную ветвящуюся окрестность точки  $A$ . Таким образом, *конечнолистная ветвящаяся окрестность вершины  $A$  угла величины  $\alpha$  может быть построена в том и только в том случае, когда  $\alpha$  имеет вид  $\left(\frac{m}{n}\right)\pi$ , т. е.  $\alpha$  соизмери-*

мо с  $\pi$ . В противном случае (когда отношение  $\alpha/\pi$  иррационально) окрестность описанного выше типа построить не удастся, и случай несоизмеримых с  $\pi$  углов не дает таких «простых» особых точек, как точки ветвления конечного порядка.

Заметим, что если  $\alpha$  имеет вид  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ , т. е.  $m=1$ , описанное построение сразу дает *однолистную* окрестность, и особая траектория, попадающая в точку  $A$ , может быть естественным (и однозначным) образом продолжена за точку  $A$ . В этом случае точку  $A$  не имеет смысла считать особой. Сказанное позволяет доказать теорему 1 из § 22. Предварительно предлагаем читателям решить несложную задачу.

**Задача 24.1.** Найти все многоугольники  $Q$ , все углы которых имеют вид  $\pi/n$  (бильярд в таких многоугольниках не будет иметь особых точек и особых траекторий).

Решение задачи 24.1 показывает, что к указанному виду «неособых» многоугольников относятся торические многоугольники — четырех указанных в теореме 1 § 22 видов — и только они. Значит, во всех остальных многоугольниках бильярдные пучки либо имеют *особые* точки типа мультиседел (когда все углы многоугольника соизмеримы с  $\pi$ ), либо, если хотя бы один угол многоугольника несоизмерим с  $\pi$ , более сложные особенности. Это и доказывает теорему 1 из § 22.

**Пример 1.** Пусть  $U$  — угол величины  $\alpha = 2\pi/3$ . Тогда его вершина  $A$  имеет 2-листную окрестность, что дает особую точку типа *седла* ( $m=2$ ). Такими являются все углы правильного *шестиугольника*. Отсюда вытекает, что даже бильярд в правильном шестиугольнике имеет особенности (см. ниже задачу 24.3).

Вернемся теперь к построению обмоток кренделей, отвечающих бильярдам и разберем несколько примеров их построения.

**Пример 2.** Пусть  $Q$  — прямоугольный треугольник с острыми углами  $\alpha_1 = \pi/10$  и  $\alpha_2 = 2\pi/5$ . Рассмотрим пучок параллельных траекторий в правильном 10-угольнике  $\tilde{Q}$ , составленном из 20 треугольников, равных  $Q$ , «обложенных» с помощью последовательных отражений вокруг вершин угла  $\alpha_1$ . Нетрудно проверить, что бильярд задает склейку пар противоположных сторон  $\tilde{Q}$  (траектории бильярда получаются из траекторий параллельного пучка именно с такими перескакиваниями).

**Задача 24.2.** Произвести указанную склейку и выяснить, к обмотке какой поверхности сводится этот бильярд. Выяснить, сколько и каких особых точек будет иметь получающаяся обмотка.

**Решение.** После склейки получится такой же, как и раньше, крендель с двумя дырками (нарисуйте картинку самостоятельно; см. также теорему § 23). Особые точки будут получаться из вершины углов  $\alpha_2 = 2\pi/5$  — это будут седла (мультиседла типа 2). Всего таких углов столько же, сколько треугольников в 10-угольнике, т. е. 20; так как  $2 \cdot 2\pi = 10 \cdot 2\pi/5$ , одно мультиседло получается склейкой 10 экземпляров угла величины  $\alpha_2$ . Следовательно, на кренделе будет ровно  $20/10 = 2$  седла. (Другой способ это увидеть — показать, что вершины 10-угольника  $\tilde{Q}$  при склейке дают на кренделе две точки —  $A$  и  $B$ : каждая из них будет особой с двумя входящими и двумя выходящими сепаратрисами.)

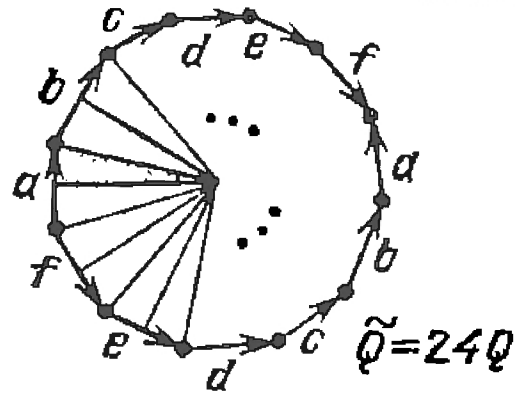

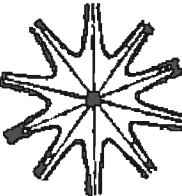
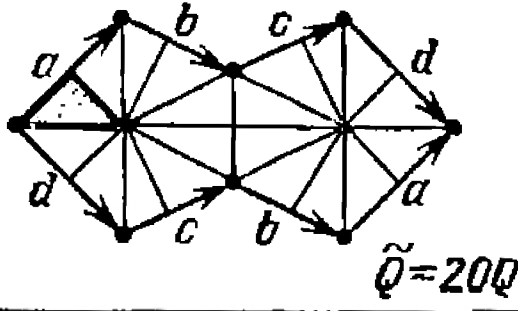


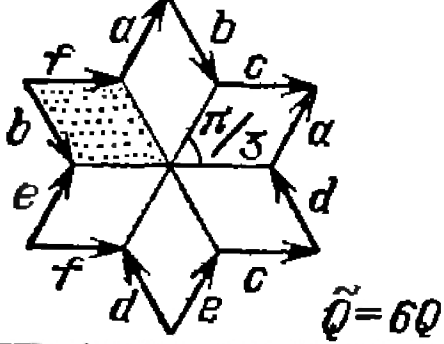


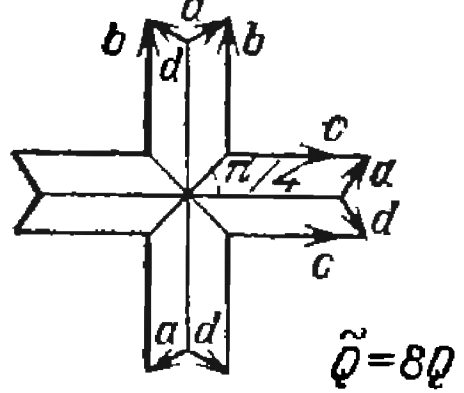


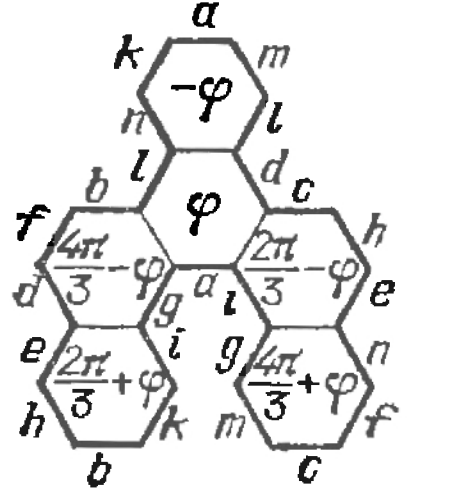
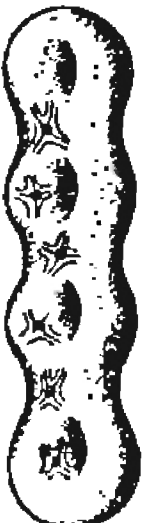

Итак, бильярд в треугольнике с углами  $\pi/2$ ,  $\pi/10$ ,  $2\pi/5$  сводится к обмотке кренделя, имеющей две особые точки типа седла.

Во всех разобранных примерах торы и крендели получались склейкой сторон некоторого многоугольника  $\tilde{Q}$ , получающегося из исходного многоугольника  $Q$  его укладыванием на плоскость с помощью симметрий. В многоугольнике  $\tilde{Q}$ , который мы будем теперь называть *фундаментальным многоугольником*, рассматривался пучок параллельных траекторий с перескакиванием с одной стороны  $\tilde{Q}$  на другую. Перескакивание определялось так, чтобы траектории «скачущего» пучка, представляющие собой последовательности параллельных отрезков на  $\tilde{Q}$ , после обратного «складывания»  $\tilde{Q}$  на исходный многоугольник  $Q$  давали бы траектории бильярда в  $Q$ . С другой стороны, закон перескакивания определял склейку фундаментального многоугольника  $\tilde{Q}$ , после которой из  $\tilde{Q}$  получалась некоторая поверхность  $S_Q$  (тор или крендель). Траектории пучка с перескакиванием после склейки давали уже *непрерывные* траектории на  $S_Q$ . Движение по этим траекториям называется *обмоткой поверхности  $S_Q$* . Эта обмотка может иметь некоторое число  $N = N_Q$  особых точек, типы мультиседел которых равны  $m_1, m_2, \dots, m_N$ .

**Задача 24.3.** Исследовать бильярды в перечисленных ниже многоугольниках  $Q$  (построить для них фундаментальные многоугольники  $\tilde{Q}$ ; указать закон склейки сторон  $\tilde{Q}$ ; выяснить (проделав склейку), какой вид имеет поверхность  $S_Q$ ; найти число особых точек  $N = N_Q$  и их типы  $m_1, \dots, m_N$ ):

- А)  $Q$  — треугольник с углами  $\pi/2$ ,  $\pi/12$ ,  $5\pi/12$ ;
- Б)  $Q$  — треугольник с углами  $\pi/2$ ,  $\pi/5$ ,  $3\pi/10$ ;
- В)  $Q$  — параллелограмм с углами  $\pi/3$  и  $2\pi/3$ ;
- Г)  $Q$  — параллелограмм с углами  $\pi/4$  и  $3\pi/4$ ;
- Д)  $Q$  — правильный шестиугольник.



$Q$	Фундаментальный многоугольник $\tilde{Q}$	Поверхность (крен- дель родор) $S_Q = S(p)$	$N_Q$	Типы особых точек
(A)	 $\tilde{Q} = 24Q$	 $S_Q = S(3)$	1	 $m=5$ $5 \cdot 2\pi =$ $= 24 \cdot \frac{5\pi}{12}$
(Б)	 $\tilde{Q} = 20Q$	 $S_Q = S(2)$	1	 $m=3$ $3 \cdot 2\pi =$ $= 20 \cdot \frac{3\pi}{10}$
(B)	 $\tilde{Q} = 6Q$	 $S_Q = S(2)$	2	$m=2;2$  2 седла
(Г)	 $\tilde{Q} = 8Q$	 $S_Q = S(3)$	2	$m=3;3$ 
(Д)	 $\tilde{Q} = 6Q$	 $S_Q = S(4)$	6	$m=2,2,2,$ $2,2,2$ 6 седел 

Ответ к этой задаче дадим в виде таблицы.

Читатель может самостоятельно продолжить эту таблицу, рассмотрев другие многоугольники.



## Глава 9

### ПОВЕДЕНИЕ БИЛЬЯРДНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В МНОГОУГОЛЬНИКАХ

Здесь рассматриваются, в основном, бильярды в многоугольниках с соизмеримыми с  $\pi$  углами — *рациональных* многоугольниках.

Бильярд в любом рациональном многоугольнике, как и бильярд в прямоугольнике, сводится к обмоткам, но уже не тора, а кренделя — сферы с ручками, — который получается в результате склеек нескольких экземпляров многоугольника. Однако обмотки кренделя, в отличие от обмоток тора, имеют особенности — так называемые *точки ветвления*, отвечающие, грубо говоря, склеиваемым вершинам многоугольника; бильярдные же траектории, искривившись после склеек, имеют в окрестностях точек ветвления вид гипербол (см. § 24).

Оказывается, что для обмоток кренделей справедлива почти та же теорема, что и для обмоток тора: *«типичная» обмотка кренделя заполняет его всюду плотно*. Эта теорема формулируется в § 25. Результаты § 25 получены Н. Н. Земляковым и А. Б. Катком (см. [19] в списке литературы).

В отличие от обмоток тора, делящихся в точности на два класса: *периодические и всюду плотные на всем торе*, на кренделе бывают непериодические траектории, получающиеся после склеек из бильярдных траекторий и заполняющие всюду плотно лишь *часть* кренделя. Построение такой траектории приведено в § 26, а доказательство того, что она заполняет часть кренделя, основано на теореме Якоби. (В механике появление кренделей возникает в тех случаях, когда функции, выражающие законы сохранения, «не перестановочны», или, как говорят, «не находятся в инволюции».) Наконец, в § 27 доказывается, что в любом *рациональном* многоугольнике существует периодическая траектория и исследуются периодические траектории в некоторых тупоугольных треугольниках.

## § 25. Траектории в рациональных многоугольниках и обмотки кренделей

В этом параграфе мы ответим на два вопроса, которые, возможно, уже возникли и у читателя.

*В любом ли многоугольнике  $Q$  бильярд можно свести к обмотке некоторой поверхности  $S_Q$ ?*

*Что дает сведение бильярдов к обмоткам кренделей  $S_Q$ ?*

Прежде всего опишем еще один подход к бильярдам, дающий возможность строить пучки с перескакиванием.

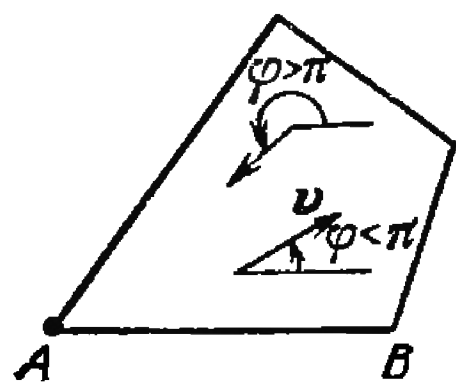


Рис. 25.1

Пусть  $Q$  — фиксированный многоугольник. Выберем на плоскости направление отсчета углов — скажем, будем задавать направление  $v$  на  $Q$  углом  $\varphi$ , отсчитываемым от направления стороны  $AB$  многоугольника  $Q$  против часовой стрелки до направления  $v$ . Угол  $\varphi$  будем измерять в радианах, причем так, что  $0 \leq \varphi < 2\pi$  (рис. 25.1).

Для каждого числа  $\varphi$  между 0 и  $2\pi$  заготовим свой экземпляр многоугольника  $Q$ , на котором нарисуем пучок параллельных траекторий с направлением  $\varphi$ . Этот многоугольник  $Q$  с нарисованными на нем траекториями обозначим  $Q(\varphi)$ . Таким образом, мы «запасли» бесконечный набор экземпляров  $Q(\varphi)$  многоугольника  $Q$ . Наложив их друг на друга в порядке возрастания  $\varphi$ , получим призму высоты  $2\pi$ , в основании которой лежит многоугольник  $Q$ .

Рассмотрим шар, «скачущий» с одного многоугольника на другие многоугольники по следующему правилу. Если в начальный момент времени шар находился на многоугольнике  $Q(\varphi_1)$ , то он движется по своей траектории до тех пор, пока не попадет на одну из сторон, скажем  $CD$ . Если бы шар был бильярдный, то он отскочил бы от стороны  $CD$  по закону упругого отражения и стал бы двигаться под новым направлением  $\varphi_2$ . Наш же скачущий шарик перескакивает со стороны  $CD$  многоугольника  $Q(\varphi_1)$  в ту же точку той же стороны  $CD$  другого многоугольника  $Q(\varphi_2)$ , где  $\varphi_2$  было определено выше (из закона упругого отражения), и движется по нарисованной на  $Q(\varphi_2)$  траектории. Дойдя до стороны  $KL$  многоугольника  $Q(\varphi_2)$ , шарик перескакивает в ту же точку на той же стороне  $KL$  следующего многоугольника  $Q(\varphi_3)$ , где  $\varphi_3$  — направление, под которым движется бильярдный шар после соударения со стороной  $KL$ , налетев на нее под направлением  $\varphi_2$ . На

$Q(\varphi_3)$  скачущий шарик движется по нарисованной на  $Q(\varphi_3)$  траектории, и так далее (рис. 25.2). Таким образом, скачущий шарик перескакивает с одного многоугольника на другой, и его траектория, которую мы назовем *скачущей*, состоит из отрезков траекторий, нарисованных на многоугольниках  $Q(\varphi_1)$ ,  $Q(\varphi_2)$ ,  $Q(\varphi_3)$ , ...

Заметим, что если наложить все эти многоугольники друг на друга, то отрезки скачущей траектории дадут траекторию бильярда в многоугольнике  $Q$ . С другой стороны, если приложить  $Q(\varphi_2)$  к  $Q(\varphi_1)$  по стороне  $CD$ ,

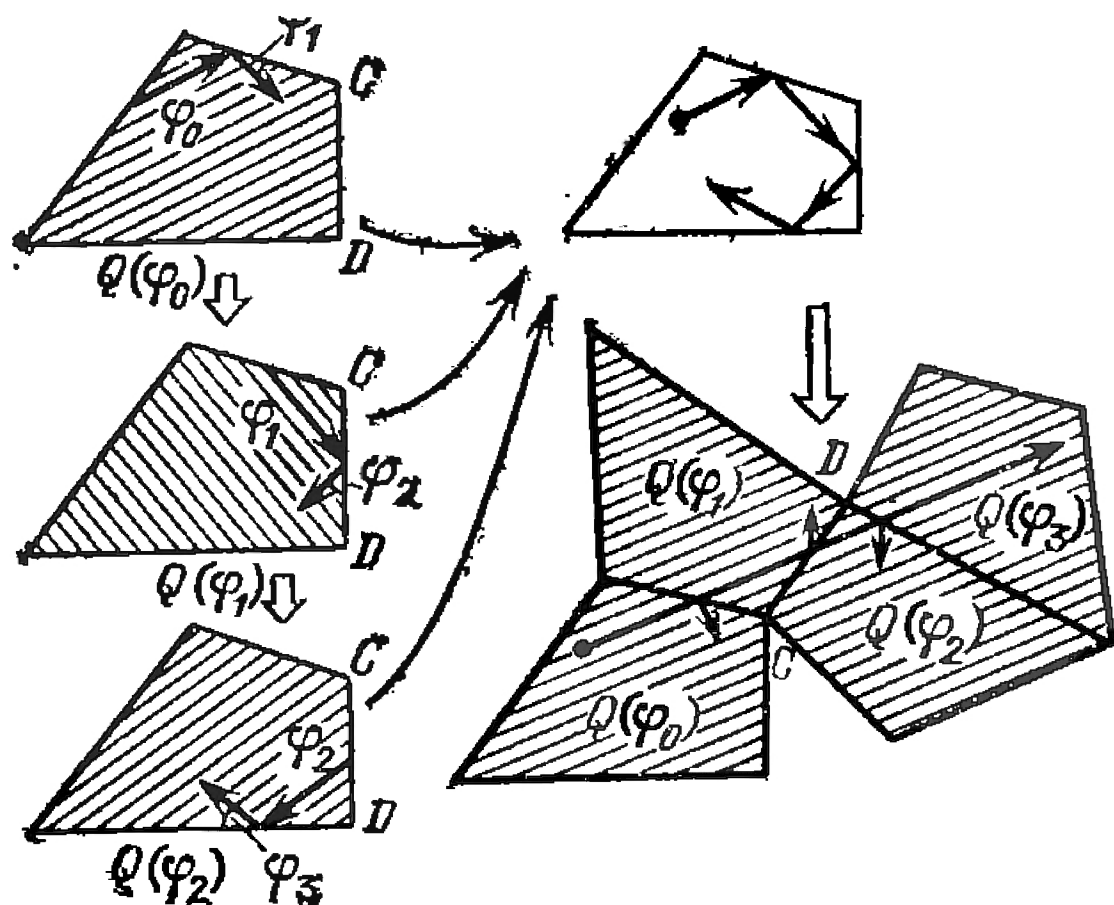


Рис. 25.2

затем приложить  $Q(\varphi_3)$  к  $Q(\varphi_2)$  по стороне  $KL$  и т. д., то отрезки скачущей траектории будут продолжать друг друга, образуя *прямую линию*. (Тем самым установлена связь между только что введенным скачущим движением и обсуждавшимися ранее пучками с перескакиваниями.)

Скачущие траектории, начинающиеся на одном и том же многоугольнике  $Q(\varphi_1)$ , могут перескочить на разные экземпляры многоугольников  $\{Q(\varphi)\}$ , если они приходят на разные стороны многоугольника  $Q(\varphi_1)$ : скажем, приходя на  $CD$ , траектория с  $Q(\varphi_1)$  перескакивает на  $Q(\varphi_2)$ , а приходя на  $ED$  — на  $Q(\varphi'_2)$ . Если к  $Q(\varphi_1)$  по сторонам  $CD$  и  $DE$  приложить, соответственно, экземпляры  $Q(\varphi_2)$  и  $Q(\varphi'_2)$ , то при попытке «выпрямить» одновременно обе траектории может оказаться, что  $Q(\varphi_2)$  и  $Q(\varphi'_2)$  будут иметь наложения (рис. 25.3). Однако наложившиеся траектории *физически различны* (они соответствуют разным направлениям движения в исходном многоугольнике  $Q$ ), и поэтому мы обязаны либо рассматривать двуслойную (дву-

листную) поверхность, наложенную на плоскость (это приводит к точкам ветвления из § 24), либо считать, что экземпляры  $Q(\varphi_2)$  и  $Q(\varphi'_2)$  «изготовлены из эластичного материала», и деформировать их так, чтобы при приложении (т. е. при подклейке) их к  $Q(\varphi_1)$  они не перекрывались. Деформацию экземпляров  $\{Q(\varphi)\}$  следует делать (и это очень существенно!) вместе с нарисованными на них траекториями; вторая из указанных точек зрения приводит к склейкам из многоугольников  $\{Q(\varphi)\}$  различного рода вспомогательных поверхностей, что и делалось нами ранее. Заметим, что если  $Q$  — невыпуклый многоугольник, то даже прикладыва-

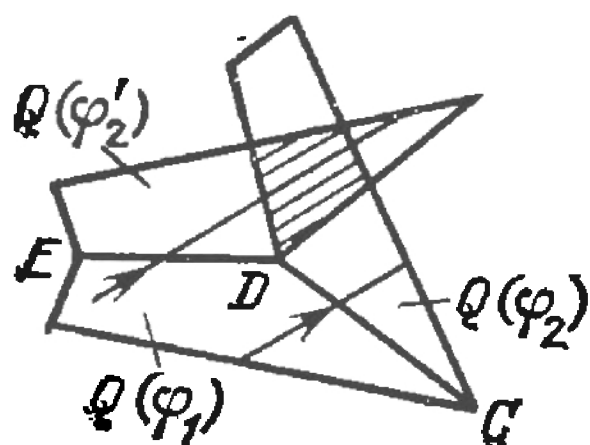


Рис. 25.3

ние к  $Q(\varphi_1)$  одного экземпляра приводит к *перекрываниям* (и к рассмотрению многолистных поверхностей).

**Задача 25.1.** Для каких многоугольников  $Q$  скачущие траектории, начинающиеся в каком-то из экземпляров  $Q(\varphi_1)$ , после всевозможных перескакиваний побывают только в конечном наборе многоугольников  $Q(\varphi_1), Q(\varphi_2), \dots, Q(\varphi_N)$  и не попадут ни на один из других экземпляров  $Q(\varphi)$ ? (Такие многоугольники для краткости будем называть имеющими *конечный тип*. В этом и только в этом случае можно надеяться, что после указанных выше склеек получится какая-нибудь «конечная» поверхность, а скачущий поток приведет к обмотке этой поверхности.)

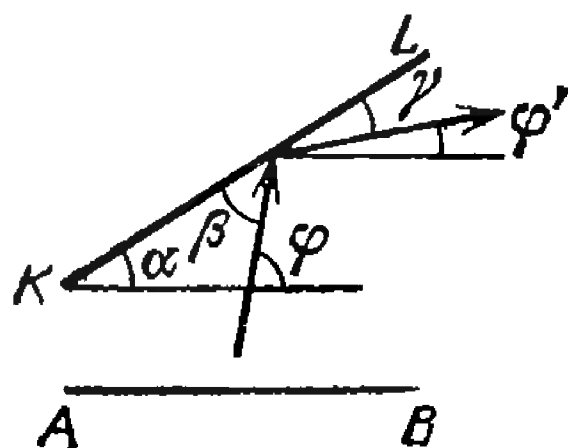


Рис. 25.4

Чтобы решить сформулированную задачу, напишем формулу для закона перескакивания (или закона склейки).

**Задача 25.2.** Пусть скачущая траектория из экземпляра  $Q(\varphi)$  перескакивает в экземпляр  $Q(\varphi')$  через сторону  $KL$ , образующую с выбранным направлением  $AB$  (от которого отсчитываются углы  $\varphi$ ) угол  $\alpha$ . Выразить  $\varphi'$  через  $\varphi$  и  $\alpha$ .

**Решение.** Согласно определению скачущих траекторий, задачу можно сформулировать так: бильярдный шар, двигаясь под углом  $\varphi$  к направлению  $AB$ , ударяется о сторону  $KL$ , образующую с  $AB$  угол  $\alpha$ ; найти угол  $\varphi'$  между направлением движения шара после удара и стороной  $AB$ . Из рис. 25.4 ясно, что  $\varphi' + \gamma = \alpha$ ,  $\varphi = \beta + \alpha$ . Из закона упругого отражения  $\beta = \gamma$ , поэтому  $\varphi' = \alpha - \gamma = \alpha - \beta = \alpha -$

— $(\varphi - \alpha) = 2\alpha - \varphi$ . Нужная формула получена:

$$\varphi' = 2\alpha - \varphi. \quad (1)$$

**З а д а ч а 25.3.** Обозначим стороны многоугольника  $Q$  буквами  $a_1 = AB, a_2, a_3, \dots, a_n$ ; пусть  $\alpha_k$  — угол между стороной  $a_k$  и направлением  $AB$  (в частности,  $\alpha_1 = 0$ ). Допустим, что все числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  соизмеримы с  $\pi$ , т. е. имеют вид  $\alpha_k = (m_k/n_k)\pi$ . Доказать, что в этом случае многоугольник  $Q$  имеет конечный тип (см. задачу 25.1).

**Р е ш е н и е.** Приведем дроби  $m_k/n_k$  к наименьшему общему знаменателю  $N$  — запишем  $\alpha_k$  в виде  $\alpha_k = (r_k/N)\pi$ . Докажем, что скачущие траектории, начинающиеся в многоугольнике  $Q(\varphi_0)$ , после любого числа перескакиваний оказываются в одном из многоугольников  $Q(\varphi)$ , где  $\varphi$  имеет вид

$$\varphi = \varphi_m^\pm = \pm \varphi_0 + \frac{m}{N} 2\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2)$$

Очевидно,  $\varphi = \varphi_0$  имеет такой вид. Поэтому достаточно доказать, что если  $\varphi$  имеет указанный вид и из многоугольника  $Q(\varphi)$  траектория перескакивает в  $Q(\varphi')$ , то и  $\varphi'$  имеет такой же вид. Допустим, что перескакивание происходит через сторону  $a_k$ . Согласно формуле (1)

$$\varphi' = 2\alpha_k - \varphi = 2 \cdot \frac{r_k}{N} \pi - \varphi.$$

Если  $\varphi = \varphi_m^\pm = \pm \varphi_0 + \frac{m}{N} 2\pi$ , то

$$\varphi' = \frac{r_k}{N} 2\pi - \left( \pm \varphi_0 + \frac{m}{N} 2\pi \right) = \mp \varphi_0 + \frac{r_k - m}{N} 2\pi = \varphi_{r_k - m}^\mp,$$

т. е.  $\varphi'$  имеет опять такой же вид. Утверждение доказано.

**З а д а ч а 25.4.** Доказать, что предположение задачи 25.3 (все углы  $\alpha_k$  соизмеримы с  $\pi$ ) выполнено тогда и только тогда, когда все углы многоугольника  $Q$  соизмеримы с  $\pi$ .

Многоугольники  $Q$ , все углы которых соизмеримы с  $\pi$ , для краткости мы называем *рациональными*. Эти многоугольники, как доказано, относятся к *конечному типу*, и только для них бильярд может быть сведен к обмотке соответствующей поверхности. Построение этой поверхности мы сейчас и опишем.

Приведем все числа  $\alpha_k$  из задачи 25.3 к наименьшему общему знаменателю  $N$ , как в решении этой задачи, и рассмотрим  $2N$  экземпляров  $n$ -угольника  $Q = Q(\varphi_m^\pm)$ , где  $\varphi_m^\pm$  определены формулами (2). Согласно задаче 25.3, многоуголь-

ники этого набора при определенной бильярдом в многоугольнике  $Q$  склейке приклеиваются друг к другу:  $n \cdot 2N$  сторон этих многоугольников разбиваются на пары в соответствии с законом склейки, и эти пары сторон подклеиваются друг к другу. Конечно, частично склейку можно произвести, прикладывая (без перекрытий) многоугольники  $Q(\varphi_m^\pm)$  друг к другу на плоскости — при этом получается большой многоугольник  $\tilde{Q}$  на плоскости, который мы ранее называли *фундаментальным*. Для окончательной склейки следует считать фундаментальный многоугольник и многоугольники  $Q(\varphi_m^\pm)$  *эластичными*.

**Т е о р е м а 1.** В результате описанной склейки многоугольников  $\{Q(\varphi_m^\pm)\}$  получится замкнутая ориентируемая поверхность  $S_Q$ , вид которой однозначно определяется набором углов  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , или же набором углов многоугольника  $Q$ .

На доказательстве этой теоремы мы останавливаться не будем; оно вытекает из общей теоремы § 23 о склейке поверхностей из многоугольников и рассуждений § 24.

Из определения склеек следует, что скачущие траектории на поверхности  $S_Q$  будут *непрерывными*, и поток этих траекторий дает *обмотку*  $S_Q$  (возможно, с особыми точками). Поверхность  $S_Q$  является кренделем  $S(p)$  некоторого рода  $p$ , т. е. сферой с  $p$  ручками (см. § 23).

Можно показать, что поверхности  $S_Q$  из теоремы 1 не могут быть сферами (т. е.  $S_Q \neq S(0)$ ), а торами ( $S_Q = S(1)$ ) они являются лишь тогда, когда  $Q$  принадлежит к одному из перечисленных в теореме 1 из § 22 торических типов. (Это следует из упоминавшейся в § 8 теоремы Пуанкаре «о ветрах» на поверхностях.) Отсюда вытекает, что для системы двух упругих шаров на отрезке (см. § 13) их движение сводится к потокам на инвариантных торах только при соотношениях масс  $m_1 = m_2$ ,  $m_2 = 3m_1$  и  $m_1 = 3m_2$ , в случае же когда угол  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{m_1/m_2}$  соизмерим с  $\pi$  (см. § 14), система шаров имеет две не меняющиеся со временем функции, два так называемых *первых интеграла*: интеграл энергии  $H = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$  и интеграл  $F(\varphi) = |\varphi| \bmod(2\pi/N)$  (определенный в решении задачи 25.3), и сводится к потокам на инвариантных кренделях рода  $p \geq 2$ .

Итак, мы установили, что для рациональных многоугольников изучение бильярда можно свести к изучению обмоток кренделей.

**П р и м е р ы.** Проведем описанную процедуру для некоторых рациональных многоугольников, частью уже исследованных ранее.

**А.**  $Q$  — *прямоугольник*. Тогда  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_4 = \pi/2$ , общий знаменатель дробей  $N = 2$ , и для склейки  $S_Q$  нужно

взять  $2N=4$  экземпляра  $Q(\varphi)$  — с  $\varphi=\pm\varphi_0$  и  $\varphi=\pi\pm\varphi_0$ . «Новая» склейка, конечно, дает то же, что и раньше, в § 9, — тор.

Б.  $Q$  —  $\Gamma$ -образный 6-угольник (рис. 25.5). Здесь  $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_5=0$ ,  $\alpha_2=\alpha_4=\alpha_6=\pi/2$ ,  $N=2$ , и  $S_Q$  получается из  $2N=4$  экземпляров  $Q(\varphi)$  — с  $\varphi=\pm\varphi_0$  и  $\varphi=\pi\pm\varphi_0$ . На плоскости сразу нарисуем фундаментальный многоугольник  $\tilde{Q}$ , имеющий форму рамы; склеиваемые стороны обозначены

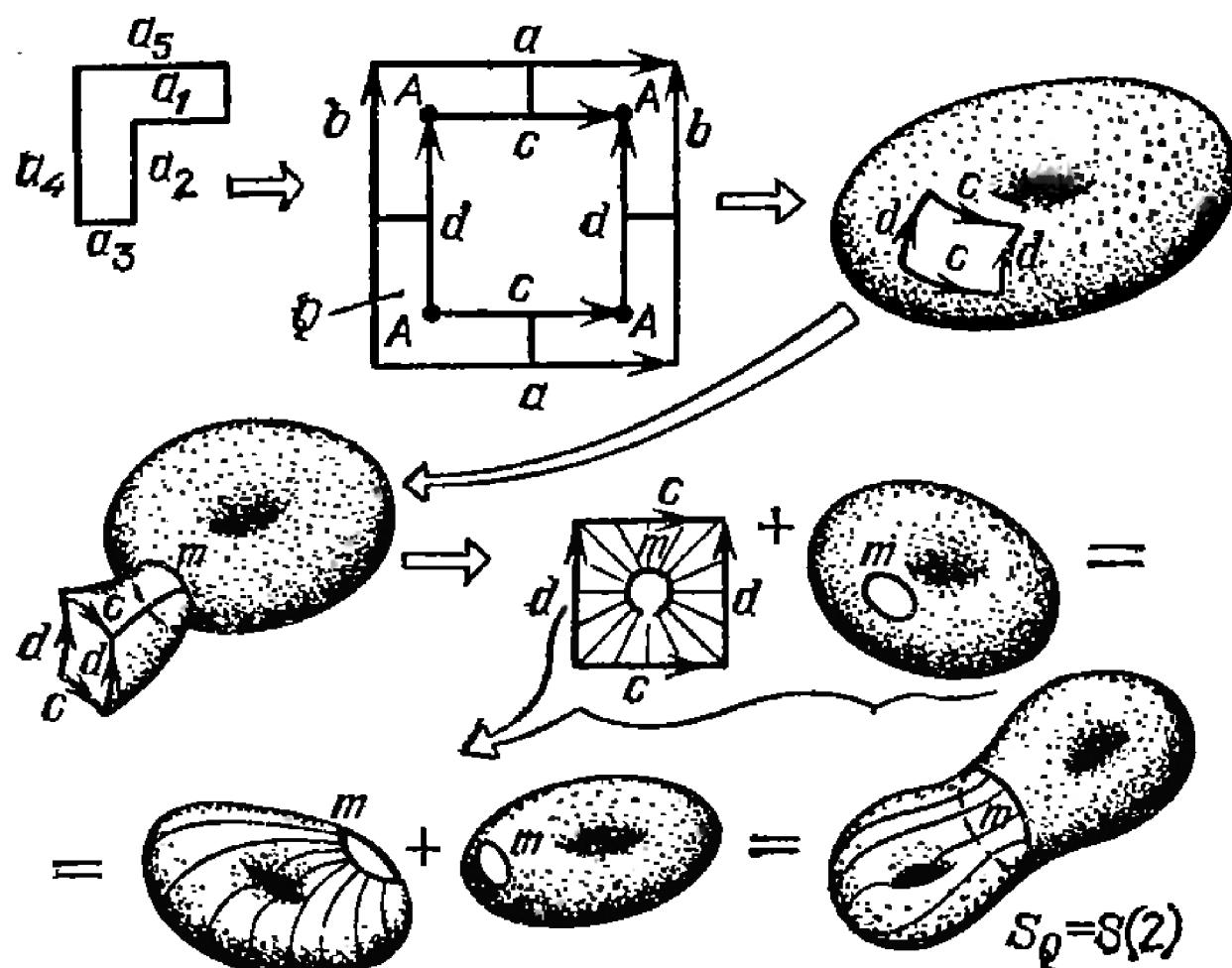


Рис. 25.5

одинаковыми буквами. После склейки сторон внешнего контура получается тор с прямоугольным вырезом; «оттянув» этот вырез, отрежем кусок тора по кривой  $m$  и склеим пары сторон  $c$  и  $d$  — получим тор с дыркой  $m$ , края которой нужно приклеить к краям такой же дырки на исходном торе. В итоге получим крендель  $S(2)$ . Соответствующая обмотка имеет ровно одну особую точку — мультиседло типа 3, получающееся при склейке вершин внутреннего контура рамки  $\tilde{Q}$ .

**Задача 25.5.** Постройте поверхности  $S_Q$  для многоугольников  $Q$ , имеющих форму букв П, О, Т (рис. 25.6).

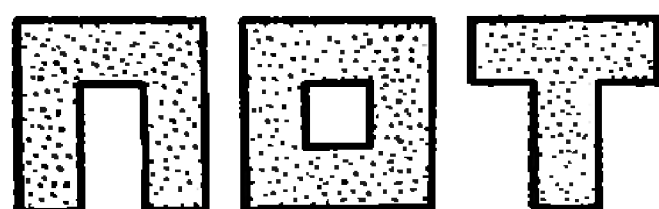


Рис. 25.6

В.  $Q$  — равносторонний треугольник. Для него  $\alpha_1=0$ ,  $\alpha_2=2\pi/3$ ,  $\alpha_3=\pi/3$ ;  $N=3$  и  $S_Q$  склеивается из  $2N=6$  экземпляров  $Q(\varphi)$  — для  $\varphi=\pm\varphi_0$ ,  $2\pi/3\pm\varphi_0$ ,  $4\pi/3\pm\varphi_0$ .



Г.  $Q$  — правильный 6-угольник. Здесь  $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_5 = \pi/3$ ,  $\alpha_3 = \alpha_6 = 2\pi/3$ ;  $N=3$ ,  $S_Q$  склеивается из  $2N=6$  шестиугольников  $Q(\varphi)$ , где  $\varphi = \pm\varphi_0, 2\pi/3 \pm \varphi_0, 4\pi/3 \pm \varphi_0$ .

Д.  $Q$  — прямоугольный треугольник с углами  $\pi/8$  и  $3\pi/8$ . Для него  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi/2$ ,  $\alpha_3 = \pi/8$ ;  $N=8$  и  $S_Q$  склеивается из  $2N=16$  треугольников  $Q(\varphi)$ , с  $\varphi = \pm\varphi_0 + (m/8)2\pi$ , где  $m=0, 1, 2, \dots, 7$ .

Е.  $Q$  — прямоугольный треугольник с углами  $\pi/5$  и  $3\pi/10$ . Для него  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi/2$ ,  $\alpha_3 = \pi/5$ ;  $N=10$  и  $S_Q$  склеивается из 20 экземпляров  $Q(\varphi)$ , с  $\varphi = \pm\varphi_0 + (m/10)2\pi$ , где  $m=0, 1, 2, \dots, 9$ .

Перейдем теперь к ответу на второй вопрос: *какие выводы позволяет сделать сведение бильярдов в рациональных многоугольниках к обмоткам кренделей?* В отличие от обмоток торов, обмотки кренделей — значительно более сложный объект, и если обмотки тора были полностью исследованы в § 8 с помощью теоремы Якоби о поворотах окружности, то аналогичный анализ обмоток кренделей далеко не так прост. Мы лишь сформулируем теорему о бильярдах в рациональных многоугольниках, доказываемую с помощью рассмотрения обмоток кренделей.

Направления траекторий бильярда в любом рациональном многоугольнике  $Q$  можно разделить на два класса, которые мы назовем «плохими» и «хорошими». (Определение этих классов направлений приведено ниже.)

**Т е о р е м а 2.** *Любая траектория, идущая в «хорошем» направлении, всюду плотно заполняет многоугольник  $Q$  (либо попадет в вершину  $Q$ , и тогда ее продолжение в обратную сторону всюду плотно заполняет  $Q$ ) — это свойство не зависит от начального положения бильярдного шара. Среди траекторий, идущих в «плохих» направлениях, могут встречаться периодические траектории. Наконец, хороших направлений «значительно больше», чем «плохих» (множество «плохих» направлений можно занумеровать натуральными числами).*

Приведем построение, с помощью которого определяют «плохие» направления.

Зафиксируем положение  $A_1 A_2 \dots A_n$  многоугольника  $Q$  на плоскости, и разрешим «перекатывать» многоугольник  $Q$  из своего первоначального положения последовательными отражениями (переворачиваниями) относительно его сторон (в произвольной последовательности), и отметим на плоскости все точки  $B_1, B_2, \dots$ , в которые могут попасть вершины многоугольника  $Q$ . (Множество этих точек  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ , разумеется, бесконечно, однако счетно.)

«Плохими» направлениями называются направления всевозможных лучей вида  $A_k B_k$ , где  $A_k$  — любая вершина многоугольника  $Q$  в исходном положении,  $B_k$  — произвольная точка множества  $\mathcal{B}$ . Остальные направления называются «хорошими». В следующем параграфе будет приведен пример бильярдной траектории, идущей в «плохом» направлении, но не периодической.

**Задача 25.6.** Доказать, что для произвольного многоугольника  $Q$  (даже иррационального) есть хотя бы одно «хорошее» направление.

**Задача 25.7.** Построить множество  $\mathcal{B}$  для торических многоугольников и проверить, что теорема 2 для них выполнена.

**Задача 25.8.** Построить множество  $\mathcal{B}$  для правильного 6-угольника; для ромба с углом  $\pi/3$  (и для параллелограмма с таким же углом).

**Задача 25.9\*.** Доказать, что для правильных  $n$ -угольников при  $n \neq 3, 4$  и  $6$  множество  $\mathcal{B}$  всюду плотно на плоскости, т. е. в любом круге произвольного радиуса  $\varepsilon$  найдется хотя бы одна точка этого множества.

**Решение.** Достаточно доказать, что множество  $\mathcal{M}$  центров многоугольников всюду плотно. Если правильный  $n$ -угольник  $Q$  перекатит через свои стороны четное число раз, то стороны полученного  $n$ -угольника  $Q'$  будут параллельны сторонам исходного, так что  $Q'$  получается из  $Q$  параллельным переносом. Докажем две леммы.

**Лемма 1.** Если три вершины  $A, B, C$  параллелограмма принадлежат множеству  $\mathcal{M}$ , то и четвертая его вершина  $D$  также принадлежит множеству  $\mathcal{M}$ .

**Доказательство** следует из того, что мы сможем пройти из точки  $C$  в точку  $D$ , осуществляя те же параллельные переносы многоугольника, что и при переходе из точки  $B$  в точку  $A$ .

**Лемма 2.** Множество  $\mathcal{M}$  переходит в себя при повороте на угол  $2\pi/n$  вокруг любой из его точек.

**Доказательство.** Построим цепочку  $n$ -угольников, примыкающих друг к другу по стороне и «соединяющих» наш  $n$ -угольник  $Q$  с центром в точке  $O$  с  $n$ -угольником с центром в любой другой точке  $A$  множества  $\mathcal{M}$ . При повороте на угол  $2\pi/n$  вокруг точки  $O$  эта цепочка многоугольников переходит в другую цепочку, соединяющую исходный многоугольник с многоугольником, центром которого является точка  $A'$ , полученная из  $A$  тем же поворотом. Следовательно, точка  $A'$  также принадлежит множеству  $\mathcal{M}$  и лемма 2 доказана.

Мы хотим доказать, что множество  $\mathcal{M}$  всюду плотно на плоскости, в частности, что в нем найдутся сколь угодно близкие точки.

Предположим, что это не так, т. е. предположим, что все расстояния между точками множества  $\mathcal{M}$  больше некоторого положительного числа  $d$ . Отсюда и из леммы 1 следует, что  $\mathcal{M}$  — решетка, т. е. точки множества  $\mathcal{M}$  — это точки пересечения двух семейств параллельных прямых, разрезающих плоскость на одинаковые параллелограммы (докажите это сами). Но из леммы 2 следует, что эта решетка переходит в себя при повороте на угол  $2\pi/n$ . Из этого немедленно следует, что существует правильный  $n$ -уголь-

ник с вершинами в ее узлах. Докажем, что тогда  $n$  может быть равно только 3, 4 и 6 — это будет противоречить условию задачи и тем самым опровергать наше предположение, что множество  $\mathcal{M}$  не всюду плотно.

Числа  $n=3, 4$  и 6 подходят. Если  $n=5$ , то, проведя в правильном 5-угольнике с вершинами в узлах решетки  $\mathcal{M}$  все диагонали, получим, что 5 их точек пересечения также принадлежат решетке (как четвертые вершины параллелограммов, три из которых — узлы решетки). В полученном меньшем 5-угольнике, подобном исходному, опять проведем все диагонали — получим меньший подобный 5-угольник с вершинами в узлах и т. д. В конце концов сторона пятиугольника станет меньше минимального расстояния между узлами решетки, и в этот момент возникнет противоречие.

Если же  $n \geq 7$ , то все отрезки, соединяющие центр  $O$   $n$ -угольника с его вершинами, параллельно перенесем в узел решетки, чтобы точка  $O$  совпала с этим узлом. Вторые концы этих отрезков будут также лежать в узлах решетки  $\mathcal{M}$  по лемме 1. Прделаав это построение нужное число раз, придем к тому, что возникнет  $n$ -угольник с вершинами в узлах, все стороны которого меньше минимального расстояния между узлами решетки  $\mathcal{M}$  — противоречие. Задача 25.9 решена.

Оказывается, множество  $\mathcal{B}$ , построенное выше по многоугольнику  $Q$ , «почти для всех» многоугольников  $Q$  (например, для иррациональных многоугольников) всюду плотно на плоскости! Попробуйте это доказать.

**Задача 25.10.** Докажите, что для почти всех начальных положений двух упругих точечных шаров на отрезке  $[0, a]$ , массы которых относятся как  $1 : (3 + 2\sqrt{2})$ , множество точек их столкновений друг с другом всюду плотно на отрезке  $[0, a]$ .

**Решение.** Движение шаров эквивалентно бильярду в прямоугольном треугольнике  $Q$  с углом  $\pi/8$ , поскольку (см. § 14)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 = \left( \frac{1 - \cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} \right)^2 = \left( \frac{2 \sin^2(\pi/8)}{2 \sin(\pi/8) \cos(\pi/8)} \right) = \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}.$$

Выбрав для бильярдной частицы в треугольнике  $Q$  «хорошее» направление, получим в нем, по теореме 2, всюду плотную бильярдную траекторию. Точки излома траектории, лежащие на гипотенузе, всюду плотно ее заполняют. Но эти точки и отвечают точкам столкновений шаров на отрезке  $[0, a]$ , что и требовалось доказать.

Теорема 2 для торических многоугольников была доказана в части II; для остальных рациональных многоугольников (даже для правильного 6-угольника) элементарное ее доказательство в настоящее время неизвестно.

Про бильярды в многоугольниках, хотя бы один угол которых несоизмерим с  $\pi$ , известно совсем немного. Как фи-

зики, так и математики уверены в справедливости следующих утверждений.

**Гипотеза I.** Если хотя бы один угол многоугольника  $Q$  несоизмерим с  $\pi$ , то «типичная» траектория бильярда в  $Q$  всюду плотно заполняет многоугольник  $Q$ .

**Гипотеза II.** Более того, типичная траектория бильярда проходит («рано или поздно») сколь угодно близко к любой наперед заданной точке многоугольника  $Q$  под направлением, сколь угодно близким к любому наперед заданному направлению в этой точке. (Как следует из задачи

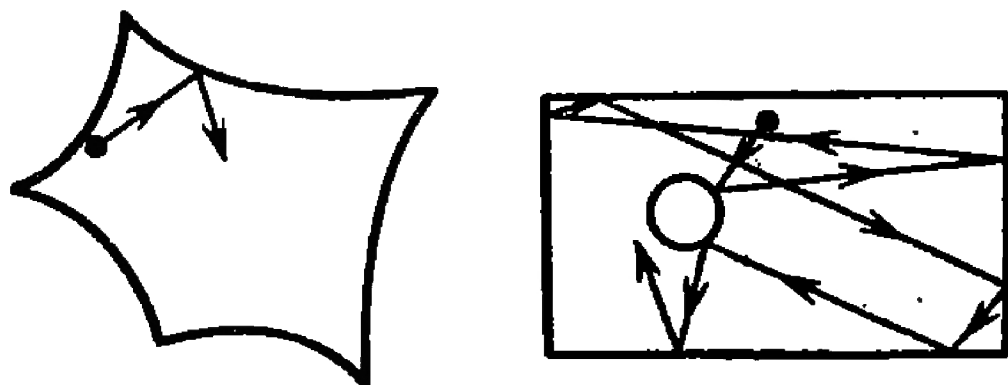


Рис. 25.7

25.3, утверждение гипотезы II в случае рациональных многоугольников несправедливо. С другой стороны, теорема 2 — это утверждение гипотезы I для рациональных многоугольников. Слова «типичная траектория» имеют смысл *выбранная наугад траектория*).

Недавно математики С. Кирчкоф, Г. Мазур и Дж. Смайли доказали, что для бесконечного множества «иррациональных» многоугольников гипотеза II справедлива \*). Однако для произвольного иррационального многоугольника  $Q$  она пока не доказана. (Здесь уместно отметить, что гипотеза II доказана для бильярда в так называемых «вогнутых» многоугольниках — в области  $Q$ , ограниченных дугами кривых, выпуклыми внутрь  $Q$  (эти бильярды носят названия «бильярдов Синая»; см. Заключение); она также доказана для бильярда в прямоугольнике с вырезанным из него кругом (рис. 25.7). Обе упомянутые теоремы очень сложны и не элементарны.) Для бильярдов в иррациональных много-

---

\*) Эти авторы доказали также, что для «почти всех» поверхностей  $S_Q$ , где  $Q$  — рациональный многоугольник, бильярдный поток на них эргодичен. Используя их результат, А. М. Степин и Ф. Эрдман доказали, что для «массивного» множества прямоугольных треугольников (так называемого «всюду плотного множества второй категории») бильярд эргодичен; тем самым для механической системы «два упругих шара на отрезке» эргодичность является «типичным» свойством.

угольниках пока что неизвестно доказательство даже такого «ослабления» гипотезы I:

**Г и п о т е з а 0.** В произвольном многоугольнике  $Q$  существует хотя бы одна траектория, всюду плотно заполняющая  $Q$ .

Доказано пока только следующее утверждение, принадлежащее К. Болдригини, Ф. Маркетти и М. Кину: *типичная бильярдная траектория в произвольном многоугольнике сколь угодно близко подходит хотя бы к одной из его вершин* (причем это доказательство опять-таки не элементарно).

В пользу этих гипотез, выдвинутых на основе «общих физических соображений», говорят только результаты численных экспериментов на ЭВМ. (В этих экспериментах для простоты рассматриваются бильярды в прямоугольных треугольниках, отвечающих системе двух шаров на отрезке.)

В заключение отметим два весьма интересных и красивых направления, в которых можно развивать изложенные здесь методы и идеи. Первое — это бильярды в многогранниках, второе — бильярды в сферических многоугольниках (т. е. в многоугольниках на сфере, ограниченных дугами больших кругов; бильярдный шар в этом случае движется по дугам больших кругов и отражается от сторон по закону «угол падения равен углу отражения». — см. геометрическое доказательство утверждения в § 17).

**З а д а ч а 25.11\*.** Пусть  $Q$  — многогранник. Ввести (определить) «скачущие траектории» и решить задачу 25.1 для этого случая.

## **§ 26. Может ли непериодическая траектория в выпуклом многоугольнике не быть всюду плотной в нем?**

Положительному ответу на вынесенный в заголовок вопрос будет посвящен весь настоящий параграф. Более того, оказывается, что непериодические и не всюду плотные траектории бывают уже в *рациональных* многоугольниках. Из теоремы 2 § 25 немедленно следует, что все такие траектории идут в «плохих» направлениях, и поэтому не являются типичными. Однако сама возможность существования этих траекторий говорит о гораздо большей сложности структуры обмоток инвариантных *кренделей*, чем обмоток торов, которые либо периодические, либо всюду плотны.

Точный ответ на поставленный вопрос заключен в следующей теореме.

**Т е о р е м а 1.** Для любого  $n$  на плоскости существует выпуклый  $n$ -угольник  $Q$ , в котором найдется непериодическая и не всюду плотная бильярдная траектория  $\gamma$ .

Докажем мы эту теорему конструктивно — для каждого  $n$  предъявим  $n$ -угольник и бильярдную траекторию в нем, которая будет обладать указанным свойством. Опишем план доказательства. Мы рассмотрим только случай  $n \geq 4$ , а случай треугольника ( $n=3$ ), как существенно более сложный, затронем в конце параграфа.

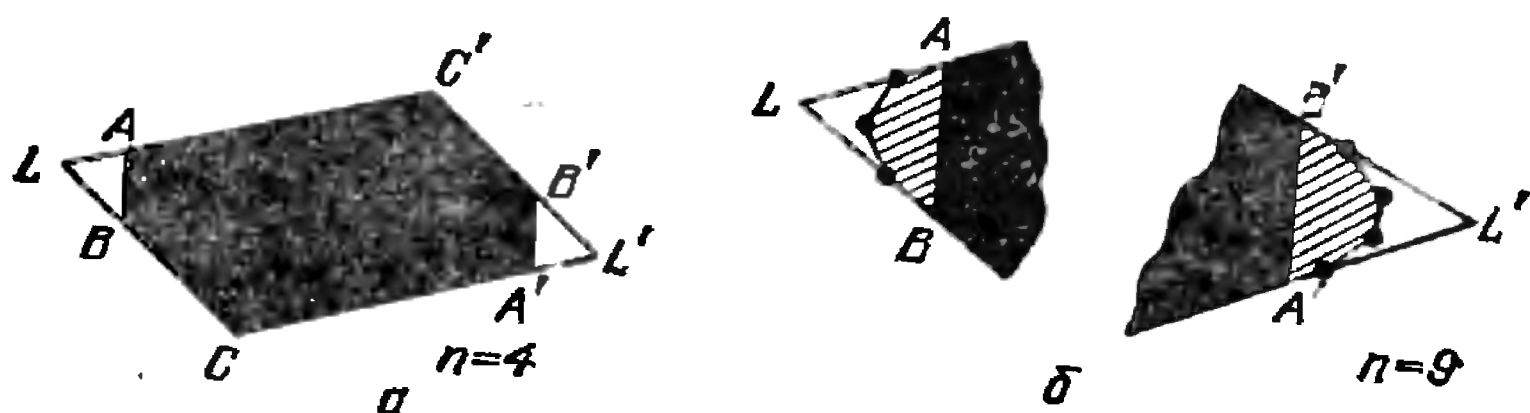


Рис. 26.1

Сначала будет построен специальный выпуклый *шестиугольник*  $ABCA'B'C'$ , в котором мы укажем бильярдную траекторию, всюду плотно его заполняющую, причем бильярдный шар ни разу не отразится от сторон  $AB$  и  $A'B'$ . Затем, продолжая пары сторон  $AC'$ ,  $BC$  и  $B'C'$ ,  $A'C$  до их пересечения в точках  $L$  и  $L'$ , получим *четыреугольник*  $LCL'C'$ , в котором указанная бильярдная траектория ни разу не попадет в окрестности  $ABL$  и  $A'B'L'$  вершин  $L$  и  $L'$  (рис. 26.1, а). Тем самым теорема будет доказана для  $n=4$ . Для  $n=5, 6, 7, \dots$  доказательство получается просто из случая  $n=4$ : достаточно обрезать светлые уголки у четырехугольника  $LCL'C'$ , как мы получим многоугольник с нужным числом сторон, а бильярдная траектория в нем (например в 9-угольнике на рис. 25.1, б) по-прежнему будет всюду плотно заполнять шестиугольник  $ABCA'B'C'$  и не будет заходить в обрезанные окрестности вершин  $L$  и  $L'$ .

Приступим к построению искомого шестиугольника  $ABCA'B'C'$  и нужной нам бильярдной траектории. Шестиугольник  $ABCA'B'C'$  будет удовлетворять следующим условиям:

1°. Он *центрально-симметричен*:  $AB \parallel A'B'$ ,  $AC' \parallel A'C$  и  $BC \parallel B'C'$  (рис. 26.2; стороны  $AB$  и  $A'B'$  считаем вертикальными);

2°. Угол при вершине  $A$  равен  $\pi/2 + \alpha$ , угол при вершине  $B$  равен  $\pi/2 + \beta$ , где  $0 < \alpha, \beta < \pi/2$ , причем

$$\operatorname{ctg} 2\alpha > \operatorname{tg} \beta, \quad \operatorname{ctg} 2\beta > \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

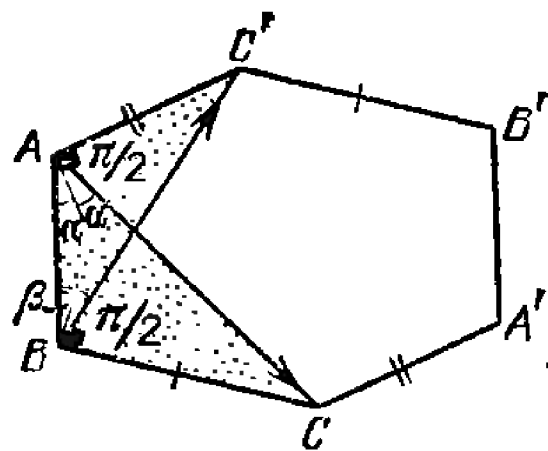


(условия (1) возникнут сами собой, когда мы в дальнейшем станем исследовать бильярдную траекторию);

3°. Перпендикуляр к стороне  $AC'$  в точке  $A$  является одновременно биссектрисой угла  $\angle BAC$ , а перпендикуляр к стороне  $BC$  является одновременно биссектрисой угла  $\angle ABC'$  (рис. 26.2).

Приведем геометрическое построение шестиугольника с такими свойствами. Зафиксируем острые углы  $\alpha$  и  $\beta$ .

а) Проведем через конец  $A$  отрезка  $AB$  прямую  $AC$  под углом  $2\alpha$ , а через конец  $B$  — прямую  $BC'$  под углом  $2\beta$  (рис. 26.2). Обе прямые  $AC$  и  $BC'$  пересекутся в некоторой точке, поскольку  $2\alpha + 2\beta < \pi$ .



Построение  
шестиугольника

Рис. 26.2

б) Проведем биссектрисы углов  $\angle BAC$  и  $\angle ABC'$ .

в) К первой биссектрисе проведем через точку  $A$  перпендикуляр  $AC'$  и ко второй биссектрисе — перпендикуляр  $BC$ . Точки  $C'$  и  $C$  получаются как точки пересечения проведенных перпендикуляров к биссектрисам с прямыми  $BC'$  и  $AC$ . В результате по-

лучится фигура, затемненная на рис. 26.2.

г) Осталось провести прямые  $C'B' \parallel BC$  и  $CA' \parallel AC'$  и отложить на них отрезки  $C'B' = BC$  и  $CA' = AC'$ , а затем соединить отрезком точки  $A'$  и  $B'$ .

Нетрудно видеть, что построенный шестиугольник  $ABCA'B'C'$  будет центрально-симметричным (требование 1°) и удовлетворять требованиям 2° и 3°.

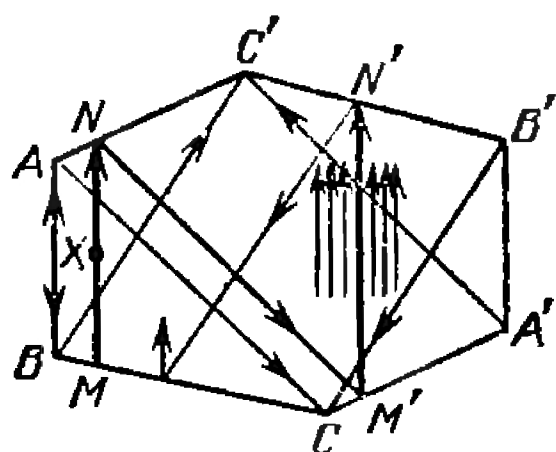
Объясним «бильярдный» смысл условия 3°. Допустим, что мы послали точечный бильярдный шар из точки  $B$  в точку  $A$  вдоль стороны  $BA$ , забыв на время, что  $A$  и  $B$  — вершины. Тогда шар отразится от прямой  $AC'$  и пойдет по прямой  $AC$  в вершину  $C$ . Точно так же, если шар движется из вершины  $A$  в вершину  $B$ , то он, отразившись от прямой  $BC$ , попадет в вершину  $C'$ . Таким образом,  $BAC$  и  $ABC'$  — двухзвенные «предельные» бильярдные траектории, вообще-то исключаемые нами из рассмотрения (мы договорились в прошлых параграфах считать попавший в вершину угла шар застрявшим в ней), но играющие важную роль при доказательстве. Тем же свойством обладают двухзвенные бильярдные траектории  $A'B'C$  и  $B'A'C'$  (рис. 26.3), когда шар движется из вершины в вершину вдоль стороны  $A'B'$ .

Пусть теперь бильярдный шар расположен в некоторой точке  $X$  внутри шестиугольника  $ABCA'B'C'$ . Запустим его



со скоростью, по модулю равной 1, параллельно стороне  $AB$  вверх. Докажем, что при некотором выборе углов  $\alpha$  и  $\beta$  вся бильярдная траектория движения шара всюду плотно заполнит шестиугольник  $ABCA'B'C'$ .

Рассмотрим для доказательства пучок отрезков внутри шестиугольника, параллельных стороне  $AB$ , концы которых принадлежат границе шестиугольника. Наш шар движется вверх вдоль одного из этих отрезков  $MN$ . После первого отражения от стороны шестиугольника ( $AC'$  на рис. 26.3) он движется по отрезку  $NM'$  параллельно диагонали  $AC$  и, отразившись в точке  $M'$  от противоположной стороны  $CA'$ , начинает двигаться вверх по другому отрезку из пучка параллельных:  $M'N' \parallel AB$  (это происходит вследствие свойства 3° шестиугольника  $ABCA'B'C'$ ). Следовательно, можно рассмотреть бильярдное преобразование пучка параллельных отрезков, переводящее отрезок  $MN$  в отрезок  $M'N'$ , т. е. одно вертикальное звено



Пучок траекторий

Рис. 26.3

бильярдной траектории — в следующее вертикальное звено этой же траектории, а сам пучок — в себя (рис. 26.3). А как ведут себя наклонные звенья траектории, параллельные либо диагонали  $AC$ , либо диагонали  $BC'$ ? Очень просто: если шар отразился от одной из сторон  $AC'$  или  $CA'$ , то наклонное звено будет идти параллельно диагонали  $AC$ ; если же шар отразился от стороны  $BC$  или симметричной ей  $B'C'$  — то параллельно диагонали  $BC'$ .

Это дает нам возможность по абсциссе  $x$  точки  $X$ , в которой находится шар, движущийся вертикально вверх, определить абсциссу  $f(x)$  точки, в которой окажется шар, когда будет двигаться по следующему вертикальному звену своей траектории. Поместим непосредственно под шестиугольником горизонтальный отрезок  $[0, 1]$ , отметив его концы числами 0 и 1 (0 — это проекция стороны  $AB$ , 1 — проекция  $A'B'$  на отрезок), и спроектируем весь пучок вертикальных отрезков на этот отрезок. В результате проекции каждого звена пучка перейдет в одну точку, а весь пучок — целиком в отрезок  $[0, 1]$ . Под действием бильярдного преобразования каждое вертикальное звено бильярдной траектории переходит в следующее вертикальное звено, следовательно проекция  $x$  этого звена перейдет в проекцию  $f(x)$  второго вертикального звена. Как по числу  $x$  вычислить число  $f(x)$ ?

Для ответа на этот вопрос естественно весь пучок параллельных отрезков разделить на два: *левый* — от стороны  $AB$  до вертикальной прямой  $l$ , проходящей через вершину  $C'$  шестиугольника, и *правый* — от прямой  $l$  до стороны  $A'B'$  (рис. 26.4). Левый пучок спроектируется на отрезок  $[0, a]$ , а правый — на отрезок  $[a, 1]$ .

Точка  $0$  — левый конец отрезка  $[0, 1]$  — под действием  $f$  переходит в точку  $f(0)$ , которая есть проекция на  $[0, 1]$  вертикального звена, проходящего через вершину  $C$  (в это звено переходит сторона  $AB$  под действием бильярдного

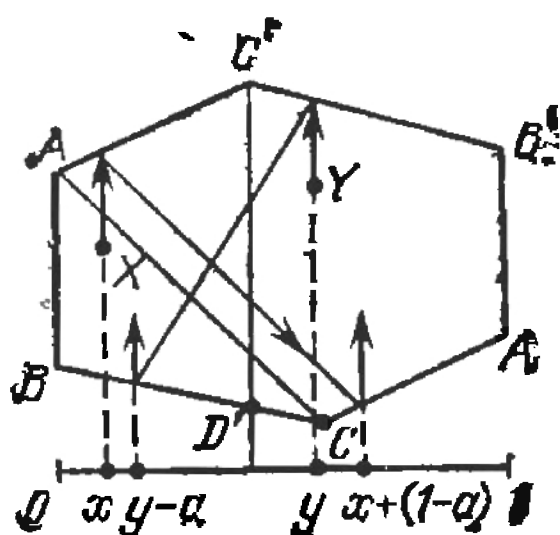


Рис. 26.4

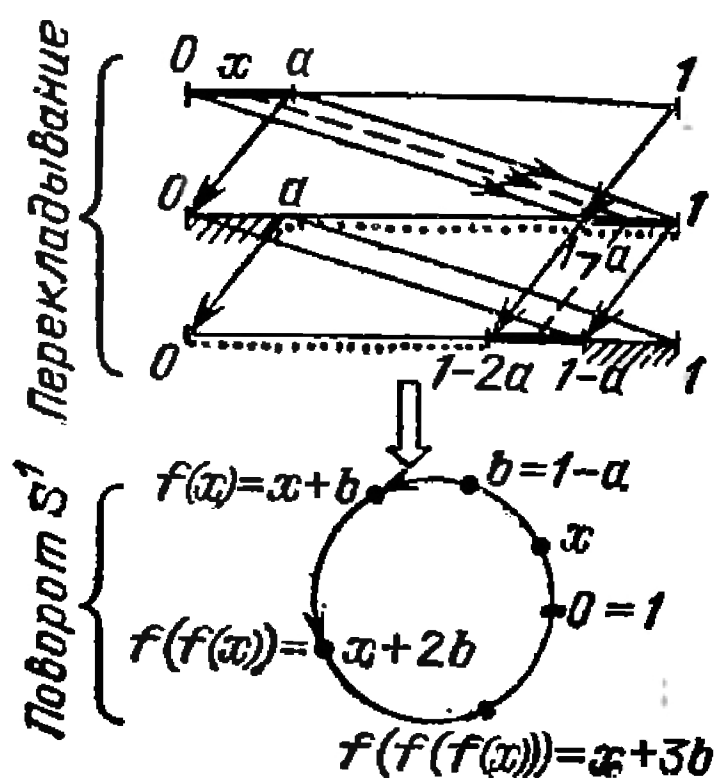


Рис. 26.5

преобразования), а точка  $a$  — проекция вертикального звена  $C'D'$  (рис. 26.4) — в точку  $f(a)=1$  (в проекцию стороны  $A'B'$  на отрезок  $[0, 1]$ , т. е. в его правый конец). Нетрудно сообразить, используя равенство противоположных сторон параллелограмма, что, поскольку точка  $a$  сместилась вправо на  $1-a$ , то и все точки отрезка  $[0, a]$  под действием преобразования  $f$  сместятся вправо на  $1-a$ , т. е.  $f(0)=1-a$ , и вообще  $f(x)=x+(1-a)$  при  $0 \leq x \leq a$ .

Если же вертикальное звено принадлежит правому пучку и проектируется в точку  $y$  на отрезке  $[a, 1]$ , то аналогичные рассуждения показывают, что под действием бильярдного преобразования оно перейдет в звено, проектирующееся в точку  $y-a \in [0, 1]$ , т. е.  $f(y)=y-a$  при  $a \leq y \leq 1$ .

Наглядно действие преобразования  $f$  отрезка  $[0, 1]$  состоит в перемене местами отрезков  $[0, a]$  и  $[a, 1]$ , или, по-другому, в *перекладывании* этих отрезков (рис. 26.5). Введем обозначение  $b=1-a$ . Мы получили, что

$$f(x) = \begin{cases} x+b & \text{при } x \in [0, a]; \\ x-a & \text{при } x \in [a, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Если свернуть отрезок  $[0, 1]$  в окружность  $S^1$  единичной

длины, то выписанная двойная формула для  $f$  превратится в одинарную:

$$f(x) = x + b \quad \text{при} \quad x \in S^1. \quad (2)$$

Действительно, при  $0 \leq x \leq a$  эта формула совпадает с исходной, а при  $x \geq a$  точка  $f(x) = x - a = (x + b) - 1$  на окружности  $S^1$  совпадает с точкой  $x + b$  (так как длина окружности равна 1).

Таким образом, *перекладывание  $f$  двух отрезков эквивалентно повороту окружности  $S^1$  на угол  $b = 1 - a$* . Поэтому можно воспользоваться теоремой Якоби из § 2 и сформулировать следующее

**У т в е р ж д е н и е.** *Перекладывание  $f$  двух отрезков  $[0, a]$  и  $[a, 1]$  является либо периодическим — при рациональном  $a$ , либо всюду плотным — при иррациональном  $a$ : траектория любой точки  $x \in [0, 1]$  (последовательность  $f(x)$ ,  $f(f(x))$ ,  $f(f(f(x)))$ , ...) либо периодическая, либо всюду плотно заполняет отрезок  $[0, 1]$ .*

Из этого утверждения вытекает, что при рациональном  $a$  бильярдная траектория в шестиугольнике  $ABCA'B'C'$  периодическая (замкнутая), а при иррациональном  $a$  всюду плотно заполняет весь шестиугольник.

Нам осталось поэтому лишь подобрать такой шестиугольник, чтобы для него число  $a$  было иррациональным. Зафиксируем длину стороны  $AB$  (с фиксирования отрезка  $AB$  мы начали построение шестиугольника  $ABCA'B'C'$ ) и выразим числа  $a$  и  $b = 1 - a$  через  $AB$  и углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Обратимся к рис. 26.6.

Из прямоугольного  $\triangle AMC'$  получаем  $C'M = AM \times \times \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{tg} \alpha$ , а из прямоугольного  $\triangle BC'N$  —  $C'N = BN \cdot \operatorname{tg} (\pi/2 - 2\beta) = a \operatorname{ctg} 2\beta$ . Поскольку, с одной стороны,  $MN = C'N - C'M = a(\operatorname{ctg} 2\beta - \operatorname{tg} \alpha)$ , а с другой —  $MN = AB$ , находим  $AB = a(\operatorname{ctg} 2\beta - \operatorname{tg} \alpha)$  и

$$a = \frac{AB}{\operatorname{ctg} 2\beta - \operatorname{tg} \alpha}. \quad (3)$$

Аналогичным образом можно получить формулу для  $b$ :

$$b = \frac{AB}{\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{tg} \beta}. \quad (4)$$

Положительность чисел  $a$  и  $b$  эквивалентна выполнению условия 2°, накладываемому на шестиугольник.

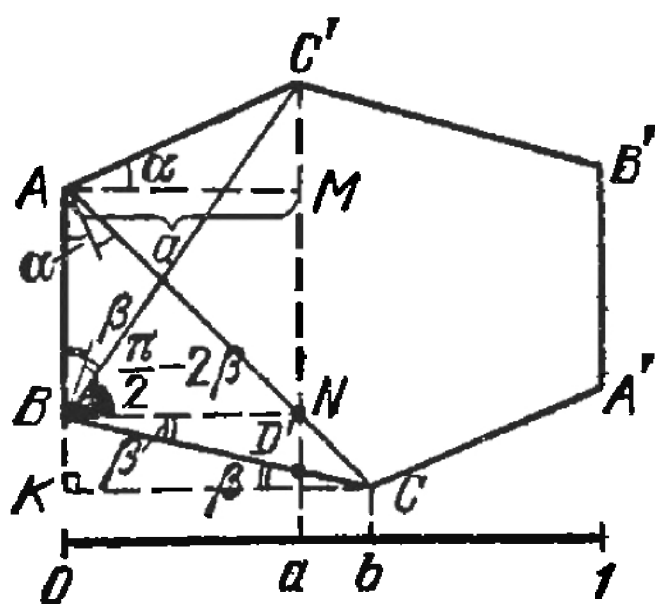


Рис. 26.6

Поскольку отрезок  $AB$  фиксирован, а функции  $\operatorname{ctg} 2\beta$  и  $\operatorname{tg} \alpha$  непрерывны, можно непрерывным изменением углов  $\alpha$  и  $\beta$  добиться того, чтобы отношение  $AB/(\operatorname{ctg} 2\beta - \operatorname{tg} \alpha)$  стало иррациональным (это отношение иррационально для почти всех  $\alpha$  и  $\beta$  из интервала  $(0, \pi/2)$ ). Итак, для почти всех шестиугольников число  $a = a(\alpha, \beta)$  иррационально.

Следовательно, для почти всех шестиугольников, удовлетворяющих условиям  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ , указанная бильярдная траектория всюду плотна в них, что и требовалось доказать.

Таким образом, для  $n = 4$  и для  $n > 4$  теорема доказана.

Для  $n = 3$  теорему доказывать не будем; отметим только, что существует равнобедренный треугольник с очень тупым углом при вершине, в котором специальным образом (очень хитрым!) построенная бильярдная траектория всюду плотно заполняет лишь некоторую его часть. Доказательство в случае  $n = 3$  опять сводится к рассмотрению перекладывания двух отрезков, возникающего при специальных симметричных отражениях треугольника относительно его сторон.

Следствием теоремы 1 для  $n = 3$  служит теорема 3 из § 14. Действительно, для «газа» из двух точечных молекул на отрезке конфигурационным пространством является прямоугольный треугольник, а если отношение масс молекул очень велико, то острый угол этого треугольника очень мал. Отражая треугольник относительно катета, лежащего против этого угла, получаем равнобедренный треугольник с очень тупым углом (близким к  $\pi$ ) при вершине. Непериодическая, но и не всюду плотная траектория в этом треугольнике заполняет всюду плотно конечное число отрезков на гипотенузе исходного треугольника, что и доказывает теорему 3 из § 14.

Формулы (3) и (4) для вычисления  $a$  позволяют построить конкретные  $n$ -угольники, в которых указанная бильярдная траектория всюду плотно заполняет лишь некоторую часть. Можно даже построить рациональные многоугольники с этим свойством. Построим сначала шестиугольник  $ABCA'B'C'$ , для которого  $\alpha = \pi/12$ ,  $\beta = \pi/6$  — углы при его вершинах  $A, B, C$  равны  $7\pi/12, 2\pi/3$  и  $3\pi/4$  соответственно. Заметим, что нам в действительности достаточно проверить, что отношение  $h(\alpha, \beta) = a/b = a/(1 - a)$  иррационально (объясните сами, почему); число  $a/b$  уже не зависит от длины отрезка  $AB$ . Вычисляем:

$$h\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a}{b} = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) / \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) = 2 + \sqrt{3},$$

т. е.  $a/b$  иррационально и, значит, указанная выше бильярдная траектория в таком шестиугольнике всюду плотна.

Продлевая его стороны до взаимных пересечений, как на рис. 26.1, а, получаем параллелограмм с углами  $\pi/4$  и  $3\pi/4$ , а обрезаая специальным образом эти углы, как на рис. 26.1, б, получаем другие многоугольники с углами, соизмеримыми с  $\pi$ , т. е. *рациональные* многоугольники, обладающие требуемой бильярдной траекторией.

Мы знаем (см. § 25), что бильярд в рациональных многоугольниках сводится к обмоткам кренделей. В случае параллелограмма с углами  $\pi/4$  и  $3\pi/4$  бильярд в нем сводится к обмоткам кренделя рода  $p=3$  (сферы с тремя ручками), имеющего два мультиседла одинаковых типов  $m_1=m_2=3$  (см. таблицу к задаче 24.3). Проследим, как на этой поверхности — сфере с тремя ручками — ведет себя построенный пучок параллельных отрезков.

Мы знаем, что бильярдное преобразование пучка параллельных отрезков, описанное выше, является перекладыванием двух отрезков, что наглядно можно изобразить в виде потока кривых на двойной «ленте» (рис. 26.7).

Эта двойная лента топологически эквивалентна (гомеоморфна) тору  $\mathbb{T}$  с дыркой, также показанному на рис. 26.7. Бильярдная траектория в шестиугольнике на торе  $\mathbb{T}$  всюду плотно заполняет его, оmyвая оба берега дырки (смыкающихся в особых точках  $A$  и  $B$ , причем из первой во вторую идут две сепаратрисы): левый пучок параллельных отрезков в шестиугольнике оmyвает дырку на торе слева, а правый — справа. К этой дырке подклеивается сфера с двумя ручками, в которой также имеется дырка: обе поверхности подклеиваются краями своих дырок по их границам. Итак, *построенная бильярдная траектория всюду плотно заполняет одну ручку поверхности  $S(3)$  и не заходит на остальные две ручки.*

Такая же топологическая ситуация имеет место и в общем случае для построенного *рационального*  $n$ -угольника: *бильярдная траектория заполняет всюду плотно одну из ручек поверхности  $S(p)$ , отвечающей этому  $n$ -угольнику (число ручек  $p$  зависит от типов мультиседел,*

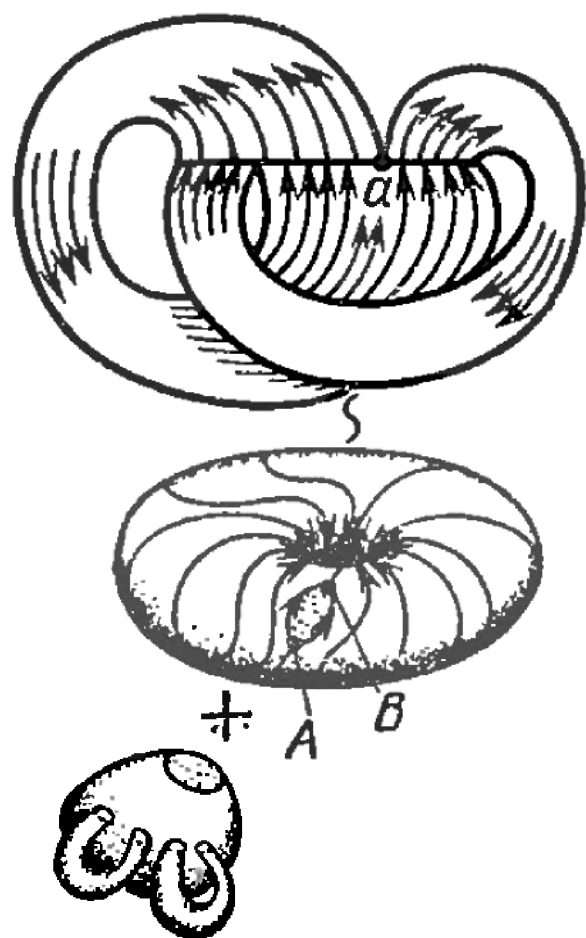


Рис. 26.7

т. е. от углов при вершинах  $n$ -угольника), и не заходит на остальные ручки. Это следует опять-таки из того, что в пучке параллельных отрезков происходит перекладывание двух отрезков, т. е. имеет место картина, изображенная на рис. 26.7.

Сформулируем в заключение две интересных, но трудно доказываемых теоремы о периодических бильярдных траекториях в рассматриваемом  $n$ -угольнике  $Q$  и о непериодических, но и не всюду плотных траекториях в трехмерных многогранниках.

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $Q$  —  $n$ -угольник из теоремы 1. Тогда для любой наперед заданной точки в шестиугольнике  $ABCA'B'C'$  внутри  $Q$  сколь угодно близко к этой точке проходит периодическая бильярдная траектория, направление которой сколь угодно мало отличается от вертикального (параллельного отрезку  $AB$ ).

Можно сказать и по-другому:

Пусть  $Q$  —  $n$ -угольник из теоремы 1,  $X$  — произвольная точка в шестиугольнике  $ABCA'B'C'$  внутри  $Q$ . Тогда бильярдный шар можно поместить в точку  $M$ , сколь угодно близкую к точке  $X$ , и запустить его под таким малым углом к вертикали (т. е. почти параллельно стороне  $AB$ ), что шарик опишет периодическую бильярдную траекторию.

Отметим, что при доказательстве теоремы 2 существенным образом используются свойства цепных дробей. И, наконец,

**Т е о р е м а 3.** В пространстве существует выпуклый многогранник, в котором найдется непериодическая бильярдная траектория, заполняющая всюду плотно трехмерную область внутри него.

Таким многогранником является прямая призма  $\Omega$ , в основании которой лежит  $n$ -угольник  $Q$  из теоремы 1. Оказывается, бильярдному шару можно придать такую начальную скорость  $v$ , что проекция шара на основании призмы  $Q$  будет описывать всюду плотную траекторию в шестиугольнике  $ABCA'B'C'$  внутри  $Q$ , а его проекция на образующую призмы заполняет ее всюду плотно; таким образом, траектория шара всюду плотно заполнит призму  $\Omega'$  с основанием  $ABCA'B'C'$  и той же высотой, что и призма  $\Omega$ . Доказательство этой теоремы также не элементарно.

Прямая треугольная призма служит конфигурационным пространством «газа из двух молекул» — шаров масс  $m_1$  и  $m_2$  одинакового диаметра  $D$ , имеющих одинаковую вертикальную составляющую скорости, — расположенного в квадрате размером  $1 \times 1$  с упруго отражающими стенками.

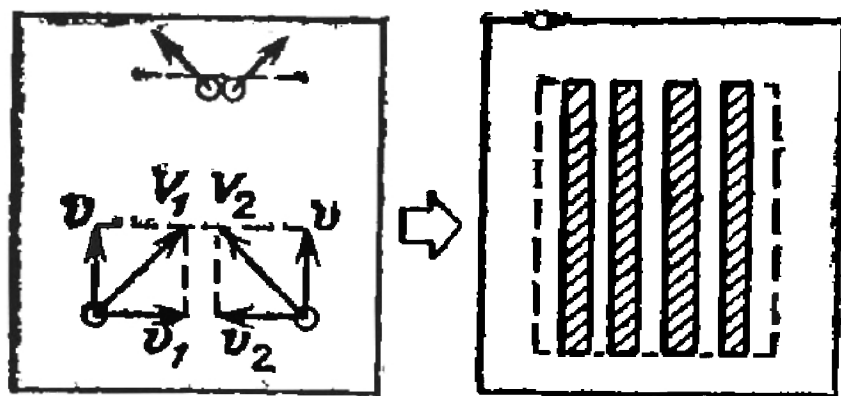


Рис. 26.8

*Точки столкновения этих шаров всюду плотно заполняют несколько прямоугольников внутри этого квадрата (рис. 26.8). Это утверждение вытекает из теоремы 3 § 14 и теоремы 3 настоящего параграфа.*

## § 27. Периодические траектории в многоугольниках и многогранниках

1. Мы уже много узнали о свойствах бильярдных траекторий в разнообразных многоугольниках. Мы узнали, что в торических многоугольниках каждая бильярдная траектория либо периодична, либо всюду плотна (§ 22); что движение бильярдного шара в рациональном многоугольнике эквивалентно движению фазовой точки по некоторой поверхности — обмотке сферы с ручками (§ 24); что типичные траектории в рациональных многоугольниках заполняют их всюду плотно (§ 25), но что не всякая траектория является либо периодической, либо всюду плотной (§ 26), как это имеет место для торических многоугольников.

Однако мы еще не задавали такой «простейший» вопрос: *а в каждом ли многоугольнике существует периодическая бильярдная траектория?*

До сих пор полного ответа на него нет даже для треугольников. В этом параграфе будет дан ответ лишь для *рациональных* многоугольников и приведены известные в настоящее время и просто описываемые конструкции периодических траекторий в довольно большом классе треугольников.

Читателям, внимательно изучившим § 6 гл. 2, может показаться, что теорема Биркгофа о наличии периодической бильярдной траектории с любым числом звеньев в любой выпуклой области с гладкой границей переносится и на случай выпуклых многоугольников. Однако это не так — чуть позже мы докажем, что у периодических траекторий в некоторых треугольниках число звеньев не может быть меньшим заранее заданной величины, и укажем на то «препятствие», из-за которого доказательство теоремы Биркгофа для



многоугольников «не проходит» (см. в связи с этим задачу 6.8).

Доказательство существования периодических бильярдных траекторий в рациональных многоугольниках, приведенное в этом параграфе, интересно тем, что в нем неожиданным образом используется абстрактная теорема Пуанкаре о возвращении из § 3, которая будет применена к инвариантной поверхности, описанной в § 24. Кроме того, теорема Пуанкаре позволит сделать некоторые интересные выводы и для случая произвольной (не обязательно многоугольной) области, в которой движется бильярдный шар. При написании этого параграфа нами частично использована статья [14].

2. Прежде чем переходить к конкретным утверждениям о периодических траекториях в многоугольниках и их доказательствам, сформулируем справедливую, на наш взгляд, гипотезу о периодических бильярдных траекториях в любой области на плоскости, до сих пор не доказанную и не опровергнутую.

*Г и п о т е з а. В любой ограниченной области  $\Omega$  на плоскости с кусочно-гладкой границей существует периодическая бильярдная траектория.*

(То же утверждение о периодических траекториях, по-видимому, справедливо и в пространстве любого числа измерений. Аналогичная гипотеза о существовании в любой ограниченной области хотя бы одной *всюду плотной* траектории уже неверно — например, всюду плотных траекторий нет в круге и в «телефоне»  $\Omega_2$  из § 5 гл. 2.)

3. Начнем исследование периодических траекторий в многоугольниках с решения задачи 6.7 — задачи Фаньяно.

*Т е о р е м а 1. В любом остроугольном треугольнике  $ABC$  существует периодическая траектория. А именно она состоит из трех звеньев, образующих вписанный треугольник минимального периметра; вершины этого треугольника являются основаниями высот исходного остроугольного треугольника  $ABC$  \*).*

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Мы докажем сначала, что стороны треугольника, вершины которого  $F, G, E$  — осно-

---

\*) Дадим механическую интерпретацию трехзвенной периодической траектории в остроугольном треугольнике  $ABC$ . Пусть на каждой из его сторон надето по колечку, которые свободно могут скользить по сторонам. Колечки попарно соединим натянутыми резинками и отпустим. При этом колечки и резинки образуют вершины и стороны треугольника наименьшего периметра, вписанного в  $ABC$ , который одновременно является периодической бильярдной траекторией в нем.

вания высот  $AE$ ,  $BF$  и  $CG$  треугольника  $ABC$ , образуют периодическую бильярдную траекторию. Для этого достаточно доказать, что все «углы падения» равны соответствующим «углам отражения»:  $\angle AFG = \angle EFC$ ,  $\angle AGF = \angle BGE$ ,  $\angle BEG = \angle CEF$ .

Докажем, например, что  $\angle AFG = \angle EFC$  (остальные равенства получаются аналогично). Пусть высоты  $AE$ ,  $BF$  и  $CG$  пересекаются в точке  $H$ . Построим на отрезках  $AH$  и  $CH$ , как на диаметрах, две окружности (рис. 27.1).

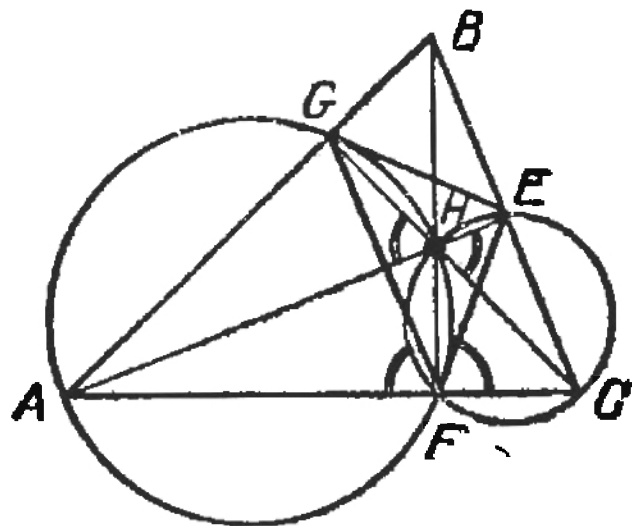


Рис. 27.1

Первая окружность пройдет через точки  $G$  и  $F$ , поскольку  $\angle AGH = \angle AFH = \pi/2$ , а вторая по аналогичной причине — через точки  $E$  и  $F$ . По теореме о вписанных углах имеем:  $\angle AFG = \angle ANG$  (оба вписанных угла опираются на одну и ту же дугу окружности  $\sim AG$ ) и  $\angle EFC = \angle ENC$  (как опирающиеся на дугу  $\sim EC$ ). Но углы  $\angle ANG$  и  $\angle ENC$  — вертикальные; из их равенства следует, что  $\angle AFG = \angle EFC$ , что и требовалось доказать.

Таким образом, мы доказали, что  $GEFG$  — периодическая бильярдная траектория в  $\triangle ABC$ .

Докажем теперь, что  $\triangle GEF$  имеет минимальный периметр среди всех треугольников, вписанных в  $\triangle ABC$ , — это свойство является *экстремальным* (в данном случае — *минимальным*) свойством периодической траектории  $GEFG$ .

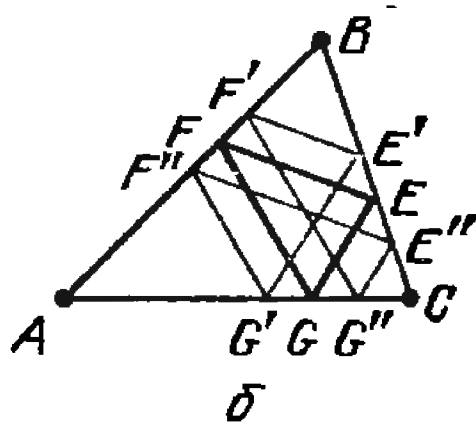
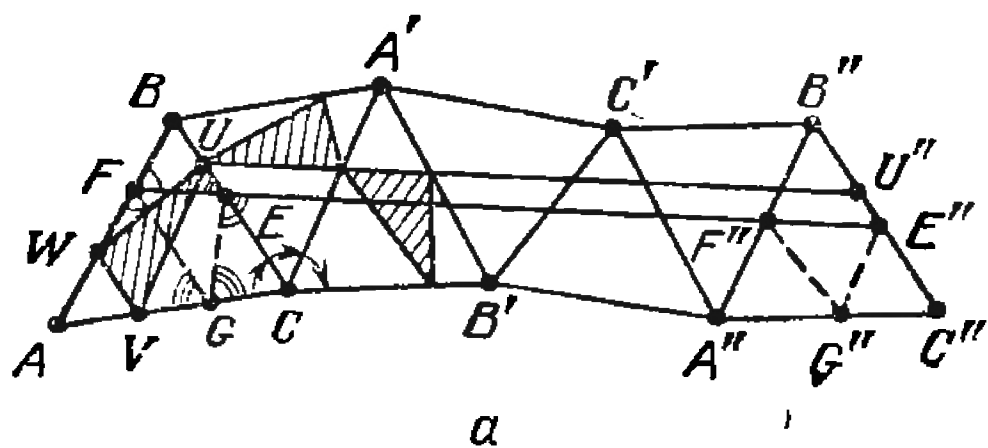


Рис. 27.2

Для этого будем выпрямлять траекторию  $GEFG$ :  $\triangle ABC$  отразим от стороны  $BC$ ; полученный таким путем  $\triangle A'BC$  отразим от стороны  $CA'$ ; результат этого второго отражения отразим от стороны  $A'B'$  и после этого произведем еще три отражения — последовательно от сторон  $B'C'$ ,  $C'A''$  и  $A''B''$  (рис. 27.2, а).

Обратим прежде всего внимание на то, что конечное положение  $A''B''C''$  может быть получено из начального положения  $ABC$  простым *параллельным переносом*. Чтобы в этом убедиться, посмотрим, что происходит с треугольником после двух первых отражений. Очевидно, что эти два отражения эквивалентны одному повороту  $\triangle ABC$  по часовой стрелке вокруг неподвижной вершины  $C$  на угол  $2C$  (буквами  $A, B, C$  обозначены и величины углов при вершинах  $A, B, C$ ). Точно так же мы могли бы перевести его из этого положения в пятое вращением по часовой стрелке около неподвижной точки  $B'$  на угол  $2B$  и, наконец, вращением на угол  $2A$  вокруг неподвижной точки  $A''$  мы привели бы его в положение седьмое, т. е. в конечное. В итоге  $\triangle ABC$  повернулся по часовой стрелке на угол  $2A + 2B + 2C = 2(A + B + C) = 2\pi$ . В результате  $\triangle ABC$  совершает полный оборот и принимает то же положение, что и вначале, оказываясь лишь передвинутым по плоскости параллельно себе. В частности,  $AB \parallel A''B''$ ,  $AC \parallel A''C''$  и  $BC \parallel B''C''$ .

Нетрудно видеть, что  $\triangle GFE$  после всех указанных отражений перейдет в  $\triangle G''F''E''$ , причем длина отрезка  $EE''$  будет равна удвоенному периметру  $\triangle GFE$  — это следует из того, что по доказанному  $GFEG$  — бильярдная траектория, и поэтому она после указанных отражений «выпрямится» именно в отрезок  $EE''$  (рис. 27.2, а). Стороны любого другого  $\triangle UVW$ , вписанного в  $\triangle ABC$ , после того же набора отражений перейдут в ломаную  $U \dots U''$ , причем, как нетрудно показать (докажите!), отрезок  $UU''$  будет параллелен отрезку  $EE''$  и равен ему по длине (используйте то, что  $BC \parallel B''C''$ ). Значит, длина этой ломаной будет больше длины отрезка  $UU'' = EE''$ , т. е. периметр  $\triangle UVW$  будет больше периметра  $\triangle GEF$ . Значит, периметр  $\triangle GEF$  минимально возможный, что и требовалось доказать.

**З а м е ч а н и е.** Кроме периодической траектории  $GFEG$  в остроугольном  $\triangle ABC$  существует *бесконечно много* других периодических траекторий. Действительно, если мы пошлем шар не по отрезку  $FE$ , а по близкому и параллельному ему отрезку  $F'E'$ , который мы можем выбрать бесконечным числом способов, то шар опишет «параллельную»  $GFEG$  периодическую траекторию  $F'E'G'F''E''G''F'$  вдвое большей длины, чем  $GFEG$  (рис. 27.2, б). Докажите это утверждение самостоятельно. Таким образом, траектория  $GFEG$  — это как бы «сдвоенная» траектория  $F'E'G'F''E''G''F'$ .

Вообще, если  $\Gamma$  — периодическая бильярдная траектория в некотором многоугольнике  $Q$ , то любая близкая ей

«параллельная» (в указанном выше смысле) траектория  $\Gamma'$  также будет периодической, так как шар отражается от тех же самых сторон и в той же последовательности. Значит, построив одну периодическую траекторию, мы одновременно получаем бесконечно много других периодических траекторий той же длины. Это множество траекторий носит название «пучок параллельных траекторий».

4. Для *тупоугольного* треугольника дело обстоит гораздо сложнее. Во-первых, в нем только основание одной из высот попадает на сторону, а не на ее продолжение; остальные два основания лежат вне треугольника, поэтому доказательство теоремы 1 «не работает». Нельзя получить в тупоугольном треугольнике периодическую траекторию из трех звеньев еще и потому, что вписанный в него треугольник минимального периметра вырождается в высоту  $BH$ , опущенную на максимальную сторону  $AC$ . Более того, в конкретном тупоугольном треугольнике периодическая траектория из минимально возможного количества звеньев может быть очень длинной. А именно справедлива

**Т е о р е м а 2.** *Для любого натурального числа  $n$  существует тупоугольный треугольник  $ABC$ , в котором любая периодическая бильярдная траектория имеет больше чем  $n$  звеньев.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем такие малые числа  $\alpha$  и  $\beta$ , чтобы число  $N(\alpha, \beta) = \min \{ -[-\pi/\alpha], -[-\pi/\beta] \}$  превосходило заданное число  $n$  ( $N(\alpha) = -[-\pi/\alpha]$  — максимальное число отражений шара в угле величиной  $\alpha$ ). Кроме того, потребуем, чтобы числа  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\pi$  были *рационально независимыми*, т. е. чтобы если хотя бы одно из целых чисел  $k, m, l$  отлично от 0, то сумма  $k\alpha + m\beta + l\pi \neq 0$ . Возьмем числа  $\alpha$  и  $\beta$  в качестве острых углов тупоугольного  $\triangle ABC$  (выраженных в радианах). Если в  $\triangle ABC$  нет ни одной периодической бильярдной траектории (мы считаем — см. гипотезу, — что такого никогда не бывает), то теорема 2 доказана. (Это чисто логическое высказывание: если какого-то объекта не существует, то для него выполнено любое свойство, в частности то, что звеньев у несуществующей периодической траектории больше  $n$ .)

Пусть теперь  $\Gamma$  — некоторая периодическая траектория в  $\triangle ABC$ . Докажем, что у нее имеется хотя бы одно звено  $XU$ , концы которого лежат на боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  (рис. 27.3, а).

Предположим противное: пусть бильярдный шар после каждого удара от боковой стороны попадает на основание

АС, т. е. отражается от сторон треугольника так: боковая сторона  $\rightarrow$  основание  $\rightarrow$  боковая сторона  $\rightarrow$  основание  $\rightarrow$  ...

Тогда из рис. 27.3, б можно определить, как связаны углы  $\varphi$  и  $\varphi'$  двух соседних отражений шара от основания: либо  $\varphi' = \varphi - 2\alpha$ , либо  $\varphi' = \varphi + 2\beta$  (см. по этому поводу зада-

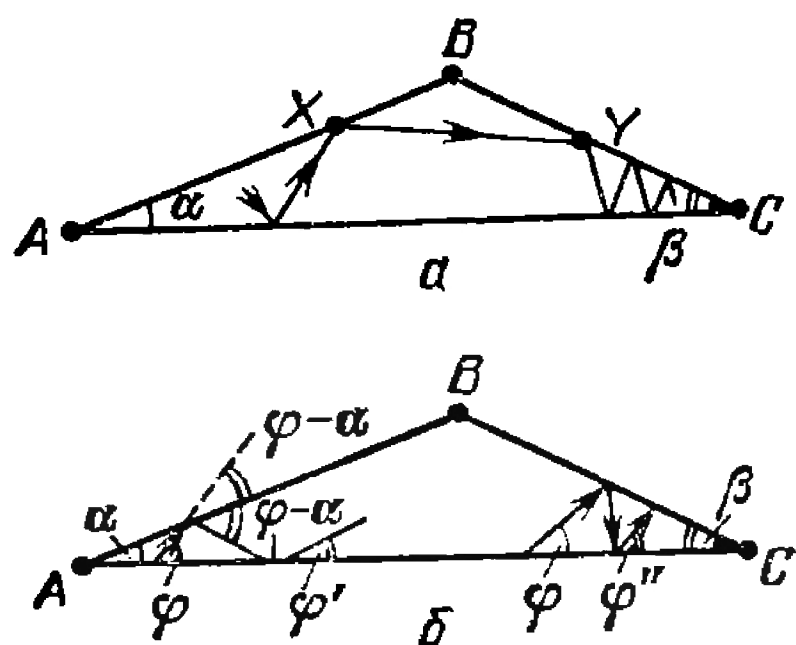


Рис. 27.3

чу 25.2, где для другого угла приводится похожая формула). Следовательно, если  $\varphi_0$  — начальный угол, под которым шар был запущен к основанию АС, то после некоторого очередного отражения он равен  $\Phi = \varphi_0 + m\beta - k\alpha$ , где  $m$  и  $k$  — целые числа. Поскольку траектория  $\Gamma$  периодическая, при некоторых  $m$  и  $k$  угол  $\Phi$  должен отли-

чаться от угла  $\varphi_0$  на полное число оборотов:

$$\begin{aligned} \Phi = \varphi_0 + 2\pi s &\Rightarrow \varphi_0 + m\beta - k\alpha = \varphi_0 + 2\pi s \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-k)\alpha + m\beta + (-s)2\pi = 0. \end{aligned}$$

Мы получили, что  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\pi$  рационально зависимы, а это противоречит выбору углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Следовательно, наше предположение о том, что шар после каждого отражения от боковой стороны попадает на основание АС, неверно, т. е. в последовательности его отражений от сторон треугольника обязательно встретится пара

...  $\rightarrow$  боковая сторона  $\rightarrow$  боковая сторона  $\rightarrow$  ...

Итак, периодическая траектория  $\Gamma$  действительно содержит такое звено  $XY$ , что  $X \in AB$ ,  $Y \in BC$ .

Посмотрим, как движется шар после пролета по звену  $XY$  (допустим, от  $X$  к  $Y$ ). В силу малости углов  $\alpha$  и  $\beta$  отрезок  $XY$  либо параллелен основанию АС, либо наклонен к АС под малым углом. «Выпрямляя» бильярдную траекторию, видим, что шар будет после пролета по отрезку  $XY$  двигаться в  $\angle BSA$  до тех пор, пока не столкнется с его сторонами  $BS$  и  $SA$  максимальное возможное число раз  $N(\beta) = -[-\pi/\beta]$  (см. § 15, п. А); лишь после всех этих отражений шар «вылетит» из  $\angle BSA$ , т. е. начнет отражаться только от сторон  $AB$  и  $AC$ . Обратив движение шара во времени, аналогичным образом исследуем его движение в  $\angle BAS$  после пролета по звену  $XY$  от  $Y$  к  $X$ . Шар будет

двигаться в  $\angle BAC$  до тех пор, пока не совершит в нем максимальное возможное число отражений  $N(\alpha) = -\lfloor -\pi/\alpha \rfloor$ . Итак, траектория  $\Gamma$  содержит не менее  $N(\alpha, \beta) = \min \{N(\alpha), N(\beta)\}$  звеньев, что согласно выбору углов  $\alpha$  и  $\beta$  превосходит исходное число  $n$ . Теорема 2 доказана.

5. Теорема 2 показывает, что для многоугольника теорема Биркгофа «не работает». Это объясняется тем, что в теореме Биркгофа рассматриваются строго выпуклые области, границы которых являются *гладкими* кривыми, т. е. не имеют изломов, как у многоугольников. Если начать проводить доказательство этой теоремы для многоугольников, то сразу видно «препятствие», не позволяющее ее доказать. Оно состоит в том, что нужная периодическая траектория из данного числа  $n$  звеньев имеет часть своих точек излома в вершинах многоугольника, а такие траектории нами не рассматриваются. Если границу многоугольника у всех вершин «сгладить», то для полученной области теорема Биркгофа уже будет верна, при этом все точки излома у периодической  $n$ -звенной траектории (где  $n < N(\alpha, \beta)$  из теоремы 2) будут сосредоточены на «сглаженных» участках, и только при  $n > N(\alpha, \beta)$  шар начнет отражаться от прямолинейных участков границы.

6\*. Рассмотрим одно общее свойство бильярдных траекторий в произвольной области  $Q$ . Имеет место важная

**Т е о р е м а 3.** *Почти любая бильярдная траектория  $\Gamma$  в области  $Q$  либо является периодической, либо проходит сколь угодно близко и под сколь угодно малым углом к любой своей точке.*

**З а м е ч а н и е.** Теорема 3 отнюдь не утверждает, что если бильярдная траектория в  $Q$  не периодична, то она всюду плотна в  $Q$ . Напомним, что в конце § 26 указан пример области  $Q$ , в которой построенная траектория не периодична и не всюду плотна в  $Q$ . Другой пример  $Q$  — круг.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** этой теоремы основывается на рассмотрении фазового пространства системы. (Читателю мы рекомендуем здесь еще раз просмотреть § 3.)

**А. Ф а з о в о е п р о с т р а н с т в о.** Множество направлений, под которыми бильярдный шар может двигаться с единичной скоростью, образует

- а) окружность  $S^1$  в случае плоской области  $Q$ ;
- б) двумерную сферу  $S^2$  в случае пространственной области  $Q$  (а если  $Q$  —  $n$ -мерная область, то  $(n-1)$ -мерную сферу  $S^{n-1}$ ).

Точками фазового пространства  $\Omega$  являются пары  $(q, v)$ , где  $q$  — положение шара в области  $Q$  (точка), а



$\boldsymbol{v}$  — направление движения шара, когда он находится в точке  $q$ ; можно считать, что  $\boldsymbol{v}$  — это точка (конец вектора) на окружности  $S^1$  в двумерном случае, и точка на сфере  $S^{n-1}$  для больших размерностей.

Мы ограничимся здесь п л о с к о й областью  $Q$ ; в общем случае доказательство повторяется почти дословно, с заменой «окружности» на «сферу». Окружность  $S^1$  можно представлять себе в виде отрезка  $[0, 2\pi]$ , у которого «склеены» концы  $0$  и  $2\pi$ . Фазовое пространство  $\Omega$  получается из прямого произведения  $Q$  на  $S^1$ , т. е. из множества пар  $(q, \boldsymbol{v})$ , где  $q \in Q$ ,  $\boldsymbol{v} \in S^1$ , некоторыми склейками. Его можно представить наглядно в виде призмы, в основании которой

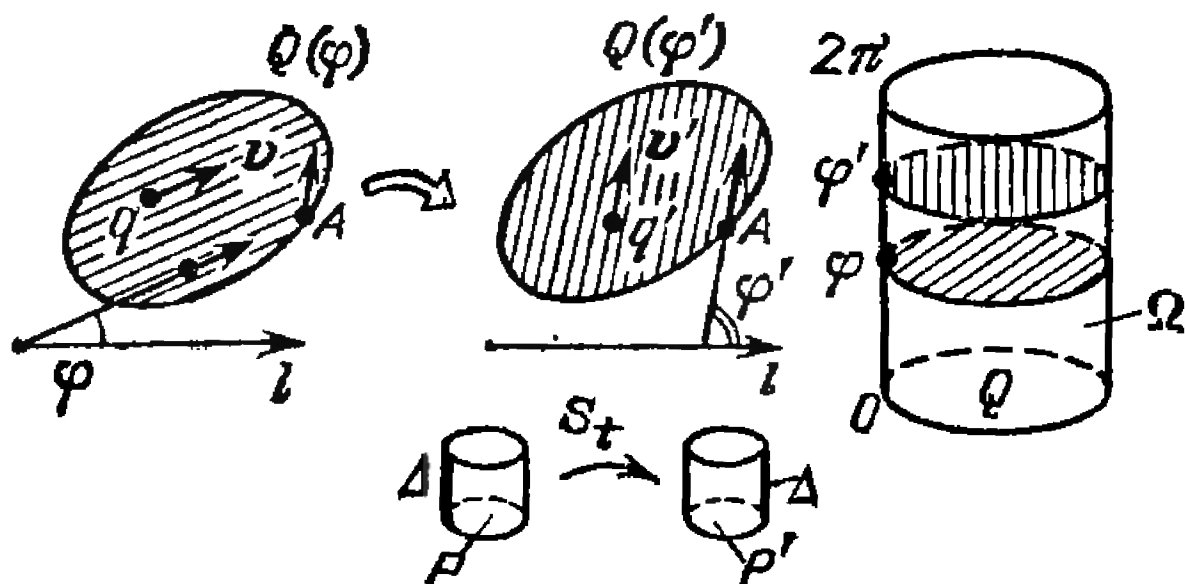


Рис. 27.4

расположена область  $Q$ , а образующей является полуинтервал  $[0, 2\pi)$ . Надо помнить только, что многие точки границы этого цилиндра  $\Omega$  «склеены» — представляют совпадающие точки (например склеены оба основания призмы — нижнее и верхнее). Далее, вся призма «расслоена» на бесконечное число слоев — областей  $Q(\boldsymbol{v})$ , причем  $Q(\boldsymbol{v})$  — это исходная область  $Q$ , но снабженная пучком параллельных отрезков в направлении  $\boldsymbol{v}$ : шар на слое  $Q(\boldsymbol{v})$  движется в направлении  $\boldsymbol{v}$ , в какую бы точку его ни поместить. Можно на плоскости, содержащей область  $Q$ , выбрать некоторую ориентированную ось  $l$  и направление  $\boldsymbol{v}$  заменить углом  $\varphi$ , образованным этим направлением с осью  $l$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ). Тогда шар после отражения от границы  $Q$  начнет двигаться в направлении  $\boldsymbol{v}'$ , образуя некоторый новый угол  $\varphi'$  с осью  $l$  (рис. 27.4). В цилиндре  $\Omega$  это будет отвечать тому, что фазовая точка, двигаясь по слою  $Q(\boldsymbol{v}) = Q(\varphi)$  и дойдя до его границы, «перескочит» на слой  $Q(\boldsymbol{v}') = Q(\varphi')$ , соответствующие точки  $(A, \varphi)$  и  $(A, \varphi')$  границ  $Q(\varphi)$  и  $Q(\varphi')$  при этом склеятся друг с другом. (Эта ситуация в точности соответствует описанию «скачущей» траектории из § 25, поэтому советуем читателю еще раз перечитать начало § 25.)



**Б. Фазовые траектории.** Итак, фазовая траектория — это скачущие в цилиндре  $\Omega$  со слоя на слой отрезки; если осуществить все склейки точек границы цилиндра типа  $(A, \varphi) \sim (A, \varphi')$ , то получится *непрерывная* кривая в трехмерном фазовом пространстве  $\Omega$ . В § 25 в качестве областей  $Q$  подробно рассматривались рациональные многоугольники, и в результате всех склеек возникала непрерывная фазовая траектория, целиком расположенная на некоторой двумерной поверхности — сфере с ручками  $S(p)$ . Этот важный факт нам пригодится позже. В общем случае фазовая кривая не лежит ни на какой поверхности, а каким-то сложным образом располагается в трехмерном многообразии  $\Omega$ .

**В. Теорема Лиувилля.** Теорема состоит в том, что *бильярдный фазовый поток*, т. е. совокупность бильярдных преобразований  $S_t$  в фазовом пространстве  $\Omega$ , *сохраняет объем* в  $\Omega$ . Это означает, что если в  $\Omega$  выделить некоторую область  $\mathcal{R}$ , то под действием бильярдного преобразования  $S_t$  эта область перейдет за время  $t$  в область  $\mathcal{R}' = S_t(\mathcal{R})$  того же объема.

Докажем теорему Лиувилля в случае, когда выделение области  $\mathcal{R} \subset \Omega$  — это одновременное выделение какой-то площадки  $P$  в бильярде  $Q$  и какого-то отрезка  $\Delta$  на образующей цилиндра  $[0, 2\pi]$ . Затем одновременно из всех точек  $\{q\}$  площадки  $P$  мы выпускаем с единичной скоростью бесконечное число бильярдных шаров, каждый под своим углом  $\varphi$ , отвечающим некоторой точке отрезка  $\Delta$ . Через время  $t$  все шары займут новое положение  $\{q'\}$  и образуют площадку  $P'$ ; при этом они будут двигаться под углами  $\{\varphi'\}$  из некоторого нового отрезка  $\Delta'$  образующей цилиндра.

Пока шары движутся внутри бильярда  $Q$ , отрезок  $\Delta$  направлений их движения не меняется:  $\Delta' = \Delta$ , при этом площадь  $P'$  равна площади  $P$ , а значит и объемы трехмерных областей  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{R}'$  одинаковы (они равны произведению площади  $P$  на длину отрезка  $\Delta$ ). Когда же происходит отражение относительно границы  $Q$ , то, разбивая границу бильярда  $Q$  на мелкие дуги и заменяя каждую такую дугу малым отрезком, получаем после процедуры «выпрямления» близких траекторий через этот малый отрезок, что площадь площадки  $P'$  не изменилась и длина отрезка  $\Delta'$  новых направлений движения шаров также не изменилось; стало быть, не изменился и объем области  $\mathcal{R}'$  в цилиндре  $\Omega$  — он остался равным объему исходной области  $\mathcal{R}$ . Теорема Лиувилля для бильярдных доказана.

Г. Теорема Пуанкаре о возвращении. Таким образом, отображение  $S_t$  удовлетворяет условиям теоремы Пуанкаре о возвращении:  $S_t(\Omega) = \Omega$  и  $S_t$  сохраняет меру (объем) в  $\Omega$ . А тогда из этой теоремы следует, что почти все точки из любой окрестности  $U$  точки  $(q, v) \in \Omega$  снова возвращаются в ту же окрестность  $U$ . Это и означает, что бильярдный шар вновь (притом бесконечное число раз!) возвращается как в сколь угодно малую окрестность своей исходной точки  $q$  бильярда  $Q$ , так и в сколь угодно малую окрестность исходного направления  $\varphi$ . Если бильярдная траектория в  $Q$  периодична, то фазовая точка приходит в точности в исходное положение  $(q, \varphi)$  бесконечно много раз; если же бильярдная траектория в  $Q$  не периодична, то можно показать, что в общем случае она заполнит всюду плотно некоторую подобласть фазового пространства  $\Omega$ .

Все сказанное выше верно в случае, когда число слоев  $\{Q(\varphi)\}$  бесконечно. Для этого случая теорема 3 доказана. Однако не всегда множество слоев  $\{Q(\varphi)\}$  бесконечно.

7\*. Остановимся особо на случае, когда  $Q$  — рациональный многоугольник. Тогда множество  $\{Q(\varphi)\}$  состоит из

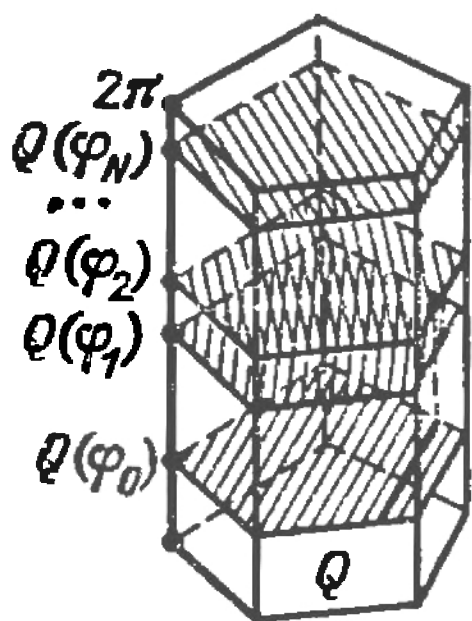


Рис. 27.5

конечного числа слоев: бильярдный шар в многоугольнике, выпущенный под произвольным углом  $\varphi_0$  к одной из своих сторон, после всевозможных отражений от границы многоугольника может двигаться лишь в конечном количестве направлений  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  (рис. 27.5). В § 24 было доказано, что после соответствующей склейки слоев  $Q(\varphi_0), Q(\varphi_1), Q(\varphi_2), \dots, Q(\varphi_N)$  возникает поверхность  $\mathcal{M}$  — сфера с ручками, инвариантная (т. е. переходящая в себя) относительно действия фазового (бильярдного) потока  $S_t$ . При этом фазовый поток  $S_t$  сохраняет, как было уже сказано, фазовый объем, и опять применима теорема Пуанкаре о возвращении. Из нее, в частности, следует, что фазовая точка бесконечно много раз попадает в сколь угодно малую окрестность точки  $(q, \varphi_0)$ , т. е. попадает в точки  $(q', \varphi')$ , где  $|q - q'| < \varepsilon$  и  $|\varphi - \varphi'| < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — произвольное, заранее выбранное малое положительное число). Но если число  $\varepsilon$  очень мало, т. е. меньше всех величин  $|\varphi_0 - \varphi_i|, |\varphi_i - \varphi_j|$ , где  $i, j = 1, \dots, N, j \neq i$ , то  $|\varphi_0 - \varphi'| < \varepsilon$  при  $\varphi' \in \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  будет выполняться лишь для  $\varphi' =$

$=\varphi_0$ . Следовательно, для рационального многоугольника  $Q$  мы доказали более сильное утверждение.

**Т е о р е м а 4.** *Любая бильярдная траектория  $\Gamma$  в рациональном многоугольнике пересекает любую окрестность любой своей точки под одним и тем же направлением (а не под сколь угодно близким).*

Иными словами, бильярдный шар в рациональном многоугольнике  $Q$  может быть запущен под произвольным фиксированным углом  $\varphi_0$  к выбранному направлению  $l$  отсчета углов так, что он будет бесконечно много раз подходить сколь угодно близко к своему начальному положению под тем же самым углом  $\varphi_0$  к прямой  $l$ .

Заметим, что о наличии периодической траектории в  $Q$  теорема 4 ничего не говорит. Более того, § 26 дает примеры траекторий, удовлетворяющих теореме 1, но не периодических.

8. И тем не менее остается сделать еще один только маленький шаг, чтобы получить периодическую траекторию в **любом** рациональном многоугольнике.

**Т е о р е м а 5.** *В любом рациональном многоугольнике  $Q$  существует периодическая траектория.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о \***). Выберем в качестве оси  $l$  из п. 6А произвольную сторону  $AB$  многоугольника  $Q$ . Положим в теореме 4  $\varphi_0 = \pi/2$ . Это означает, что шар послан перпендикулярно стороне  $AB$ .

Докажем, что в этом случае шар можно выпустить из такой точки стороны  $AB$ , что его движение будет периодическим.

Действительно, согласно утверждению теоремы 4, шар может быть запущен по прямой  $p \perp AB$  из точки  $C$  стороны  $AB$  так, что через некоторое время он снова будет двигаться по некоторой прямой  $p'$ , перпендикулярной  $AB$  и проходящей вблизи от  $p$ . Если прямая  $p'$  совпадает с  $p$ , то все доказано: шар отражается перпендикулярно от стороны  $AB$  и движется по первоначальной траектории. Не менее очевиден

---

\*) Приводимое доказательство предложено А. М. Степиным. Недавно американский математик Г. Мазур, используя мощные современные аналитические методы, доказал, что множество направлений звеньев периодических траекторий всюду плотно на окружности  $S^1$ , т. е. звенья периодической траектории в **рациональном** многоугольнике могут образовывать сколь угодно малый угол с любой наперед выбранной прямой. Таким образом, узких пучков параллельных периодических траекторий в рациональном многоугольнике в действительности бесконечно много. Преимущество геометрического доказательства состоит в том, что оно обобщается и на рациональные многогранники (см. п. 10).

и случай различных прямых  $p$  и  $p'$ : если шар движется по прямой  $p'$  от стороны  $AB$ , то следовательно, перед этим он двигался по прямой  $p'$  к стороне  $AB$ . Значит, после отражения от стороны  $AB$  шар пойдет в точности по тому же пути, по которому он двигался до отражения, но в обратном направлении. А это и означает, что траектория его движения — периодическая. Теорема 5 доказана.

*С л е д с т в и е.* В любом рациональном  $n$ -угольнике  $Q$  существует не менее  $n/2$  несовпадающих периодических траекторий, имеющих разные наборы сторон, с которыми происходят столкновения шара.

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* По теореме 5 периодическую траекторию можно направить перпендикулярно к а ж д о й из  $n$  сторон многоугольника. Однако эти траектории могут иметь один и тот же набор сторон. Поскольку никакая траектория не может иметь звенья, перпендикулярные более чем двум сторонам многоугольника, получаем, что не менее  $n/2$  из этих траекторий имеют разные наборы отражений. Следствие доказано.

Нетрудно построить  $n$ -угольник, в котором р о в н о  $n/2$  различных периодических траекторий со звеньями, перпендикулярными сторонам: это любой  $2k$ -угольник ( $n = 2k$ ) с попарно параллельными сторонами (например, правильный  $2k$ -угольник).

Из теоремы 5 получается очень красивая геометрическая картина на той инвариантной поверхности, которая склеивается из нескольких экземпляров данного многоугольника. Эта поверхность в общем случае является сферой с  $p$  ручками  $S(p)$  и некоторым количеством особых точек — мультиседел разных типов (см. § 25). На этой поверхности «перпендикулярная» периодическая траектория  $\Gamma$ , построенная в доказательстве теоремы 5, замкнута и, разумеется, не попадает ни в одну особую точку. Начав двигать по стороне  $AB$  точку  $C$ , из которой перпендикулярно  $AB$  запускается шар, видим, что траектория  $\Gamma$  будет периодической тогда и только тогда, когда она не попадает ни в одну особую точку на поверхности  $S(p)$ . Это соответствует тому, что перпендикуляр  $p$ , восстановленный в точке  $C$  на основании  $AB$ , не проходит ни через одну из вершин многоугольников, полученных отражениями из исходного многоугольника  $Q$  при выпрямлении траектории  $\Gamma$  (при этих отражениях траектория  $\Gamma$  переходит в перпендикуляр  $p$ ; рис. 27.6). Как только перпендикуляр  $p$  пройдет через какую-то вершину одного из отраженных многоугольников, так сразу траектория  $\Gamma$  попадет в особую точку на поверхности  $S(p)$ .

Из рис. 27.6 видно, что для всех точек  $C$ , лежащих на интервале  $C_1C_2 \subset AB$ , где  $C_1, C_2$  — основания перпендикуляров  $p_1$  и  $p_2$  к прямой  $AB$ , проходящих через две вершины отраженных многоугольников, запущенный из точки  $C$  шар опишет периодическую траекторию одной и той же длины. Перпендикуляры  $p_1$  и  $p_2$  задают «коридор» периодических траекторий равной длины. Можно доказать (этого мы делать здесь не будем), что весь отрезок  $AB$  разбивается на конечное число отрезков, каждый из которых задает семейство периодических «перпендикулярных» траекторий одинаковой длины (траектории в возникающих «коридорах» имеют одинаковую последовательность отражений). Отсюда следует, что длины «перпендикулярных» траекторий ограничены.

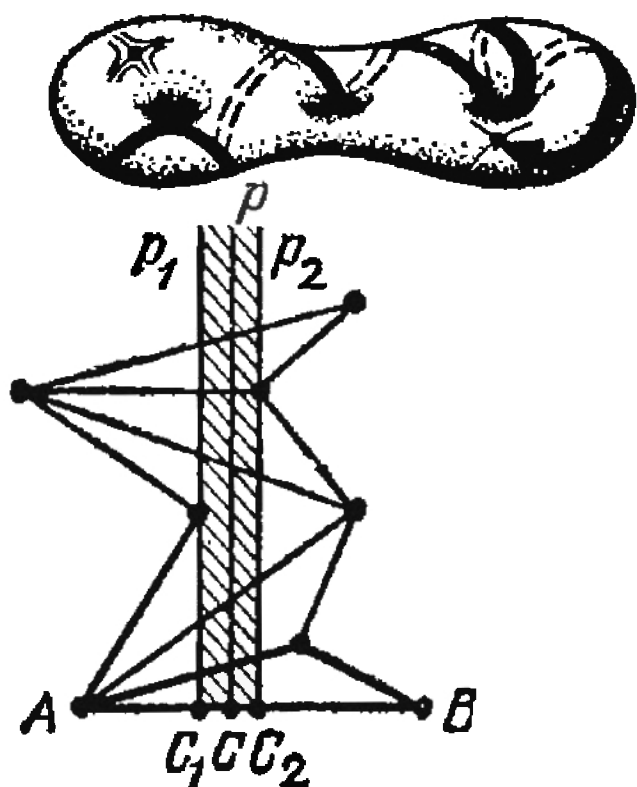


Рис. 27.6

9. Вернемся вновь к периодическим траекториям в треугольниках. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — величины острых углов  $A$  и  $C$   $\triangle ABC$ :  $0 < \alpha, \beta < \pi/2$ . Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси и будем отмечать на горизонтальной оси величину угла  $\alpha$ , а на вертикальной — величину угла  $\beta$ . Пара  $(\alpha, \beta)$  характеризует (с точностью до подобия) треугольник  $ABC$ , которому поставим в соответствие одну точку  $M$  с координатами  $(\alpha, \beta)$  на плоскости  $O\alpha\beta$ . Например, точке  $M = (\pi/3, \pi/3)$  соответствует равносторонний треугольник, а точке  $M = (\pi/4, \pi/4)$  — равнобедренный прямоугольный треугольник.

**Задача 27.1.** а) Какие треугольники соответствуют точкам  $(\pi/6, \pi/3)$ ;  $(\pi/100, \pi/100)$ ;  $(\alpha, \beta)$ , где  $\alpha + \beta > \pi/2$ ;  $\alpha + \beta < \pi/2$ ? б) Каким треугольникам отвечают точки на плоскости  $O\alpha\beta$ , отстоящие от начала координат  $(0, 0)$  на расстояние, меньшее  $\pi/100$ ?

**Ответ.** а) Прямоугольный; равнобедренный тупоугольный; остроугольный; тупоугольный. б) Тупоугольные треугольники с тупым углом  $\gamma > (100 - \sqrt{2})\pi/100$ .

Множество точек  $(\alpha, \beta)$  на плоскости  $O\alpha\beta$  заполняет в первой четверти квадрат  $OXYZ$  без границы со стороной  $\pi/2$ :  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $0 < \beta < \pi/2$ . Этот квадрат назовем «диаграммой треугольников»  $D$ .

Отметим на диаграмме  $D$  те точки  $(\alpha, \beta)$ , для которых в отвечающих им треугольниках с острыми углами  $\alpha$  и  $\beta$  существует периодическая траектория.

Из теоремы 1, доказанной выше, следует, что на диаграмме отмечены все точки, идущие выше диагонали  $XZ$  квадрата  $OXYZ$ , соединяющей вершины  $X = (0, \pi/2)$  и  $Z = (\pi/2, 0)$  (рис. 27.7, а). Действительно, верхний (закрашенный)  $\triangle XYZ$  на рис. 27.7, а отвечает всем остроугольным треугольникам, поскольку для этих точек  $\alpha + \beta > \pi/2$ , а тогда третий угол треугольника  $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) < \pi/2$  — острый.

Всем точкам  $\triangle XOZ$  на диаграмме  $D$  под диагональю  $XZ$  квадрата отвечают тупоугольные  $\triangle ABC$ , поскольку

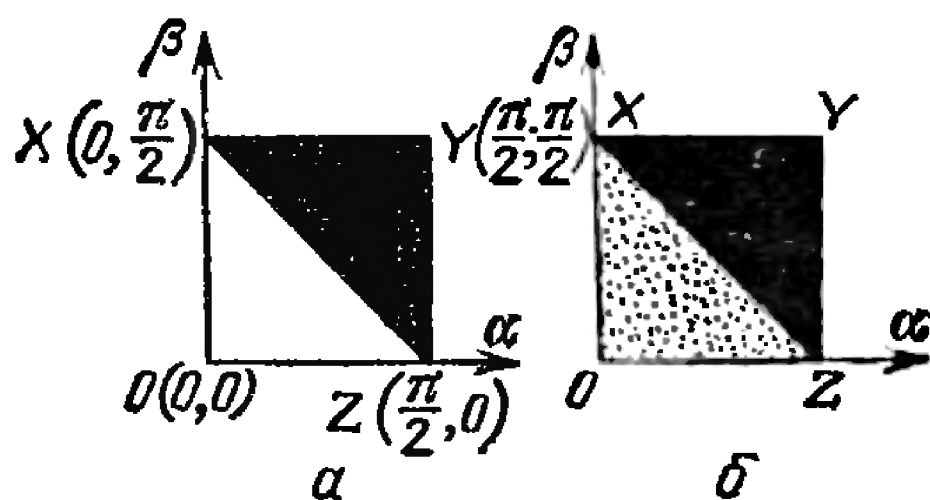


Рис. 27.7

при  $\alpha + \beta < \pi/2$  третий угол треугольника  $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) > \pi/2$  — тупой (все прямоугольные треугольники отмечены точками самой диагонали  $XZ$ ). Если каждый из углов  $\alpha$  и  $\beta$  соизмерим с  $\pi$ , т. е. если  $\alpha = (p/q)\pi$ ,  $\beta = (m/n)\pi$ ,  $p, q, m, n$  — целые числа,

то  $\triangle ABC$  — рациональный (третий угол  $\gamma$  тоже соизмерим с  $\pi$ ); отсюда по теореме 5 в  $\triangle ABC$  существует периодическая траектория. Следовательно, на диаграмме  $D$  отмечены все рациональные точки в треугольнике  $OXZ$ , заполняющие его всюду плотно (рис. 27.7, б). Множество таких точек счетно, а его мера (площадь) равна 0.

Однако можно указать в  $\triangle OXZ$  более «массивное» множество отмеченных точек, имеющее ненулевую площадь. Оно возникает при рассмотрении следующих трех конструкций, уже не связанных с соизмеримостью углов  $\alpha$  и  $\beta$  с  $\pi$ .

### Конструкция 1.

**Т е о р е м а 6.** Пусть острые углы  $\alpha$  и  $\beta$   $\triangle ABC$  связаны соотношением  $k\alpha = m\beta < \pi/2$ , где  $k$  и  $m$  — некоторые натуральные числа. Тогда в  $\triangle ABC$  существует периодическая траектория.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Отразим  $\triangle ABC$  зеркально  $k-1$  раз относительно своих сторон, начиная с отражения относительно стороны  $AB$  и двигаясь против часовой стрелки (при каждом таком зеркальном отражении вершина  $A$  неподвижна) и  $m$  раз относительно своих сторон, начиная с отражения относительно стороны  $AC$  и двигаясь также против часовой стрелки (при этих отражениях неподвижна



вершина  $B$  — см. рис. 27.8). «Конечные» стороны отраженных треугольников  $AB'$  и  $CA'$  в силу равенства  $k\alpha = m\beta$  будут параллельны друг другу:  $AB' \parallel CA'$ , а в силу условий  $k\alpha < \pi/2$ ,  $m\beta < \pi/2$ , к сторонам  $AB'$  и  $CA'$  можно провести общий перпендикуляр  $H_1H_2$ , целиком лежащий в «коридоре» отраженных треугольников (рис. 27.8). Если запустить бильярдный шар по отрезку  $H_1H_2$ , считая  $AB'$  и  $CA'$  отражающими стенками, то он будет совершать периодическое движение  $H_1 - H_2 - H_1 - H_2 - H_1 - H_2 - \dots$  между  $AB'$  и  $CA'$ . Следовательно, сделав обратные отражения треугольников ( $k$  отражений по часовой стрелке с неподвижной вершиной  $A$  и  $m+1$  отражений по часовой стрелке с неподвижной вершиной  $C$ ), «свернем» отрезок  $H_1H_2$  в бильярдную траекторию в  $\triangle ABC$ , которая, очевидно, будет периодической, что и требовалось доказать.

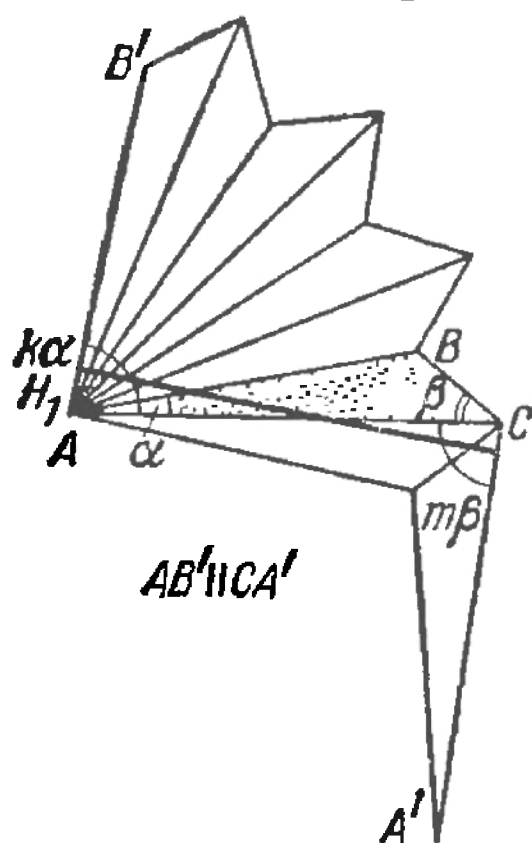


Рис. 27.8

**Задача 27.2.** Из какого числа звеньев состоит построенная периодическая траектория?

**Замечание 1.** Из теоремы 6 следует, что в любом равнобедренном треугольнике существует периодическая

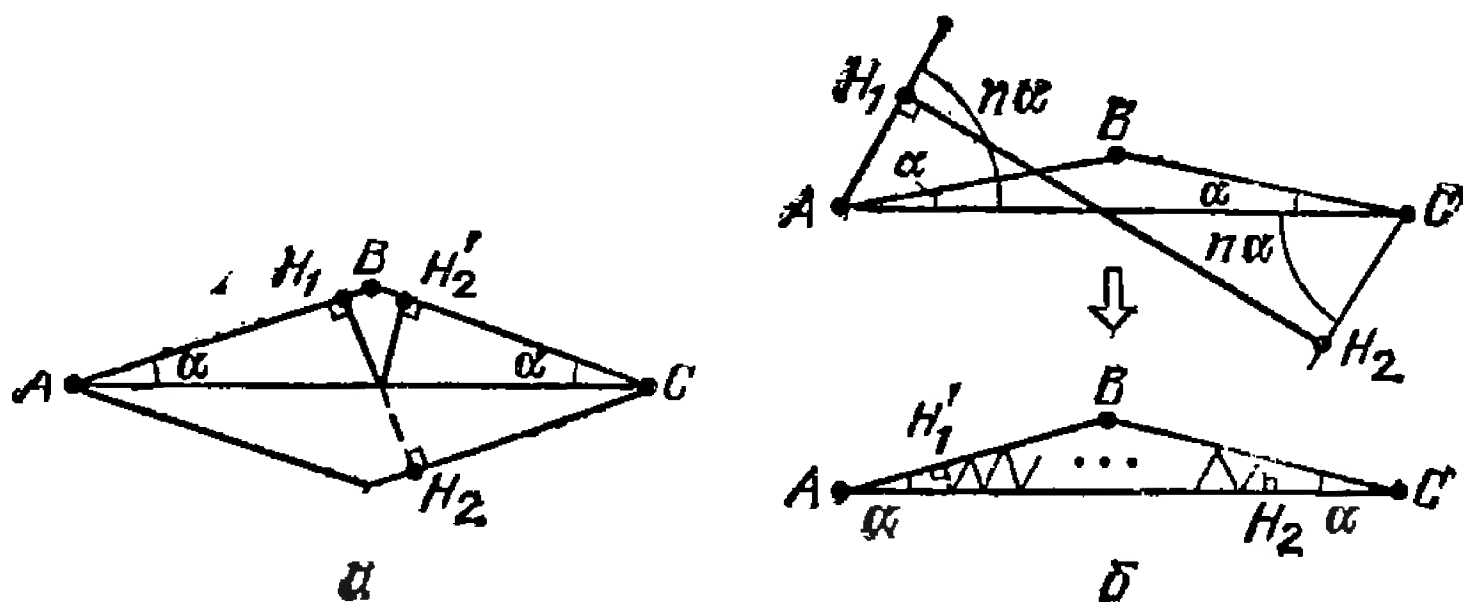


Рис. 27.9

бильярдная траектория из двух звеньев (рис. 27.9, а). Однако если острый угол  $\alpha$  при основании  $AC$  таков, что  $n\alpha < \pi/2$  при некотором  $n$ , то существуют периодические траектории из четырех, шести,  $\dots$ ,  $2n$  звеньев (рис. 27.9, б).

Вообще, если обе части равенства  $k\alpha = m\beta$  можно умножить на такое число  $n$ , что будет по-прежнему  $n \cdot k\alpha = n \cdot m\beta < \pi/2$ , то из равенств  $2 \cdot k\alpha = 2 \cdot m\beta$ ,  $3 \cdot k\alpha = 3 \cdot m\beta$ ,  $\dots$



... ,  $n \cdot k\alpha = n \cdot m\beta$  и приведенных выше рассуждений следует, что в  $\triangle ABC$  существуют периодические траектории из  $k+m$ ,  $2(k+m)$ ,  $3(k+m)$ , ... ,  $n(k+m)$  звеньев. «Параллельные» им периодические траектории состоят из того же числа звеньев.

**З а м е ч а н и е 2.** В равнобедренном *рациональном* треугольнике есть еще один замечательный тип периодических траекторий: если у траектории  $\Gamma$  одно звено  $\gamma$  параллельно основанию  $AC$ , то  $\Gamma$  — периодическая траектория. Это следует из теоремы 4.

Действительно, по теореме 4, сколь угодно близко к звену  $\gamma$  проходит другое звено  $\gamma'$  траектории  $\Gamma$ , параллельное

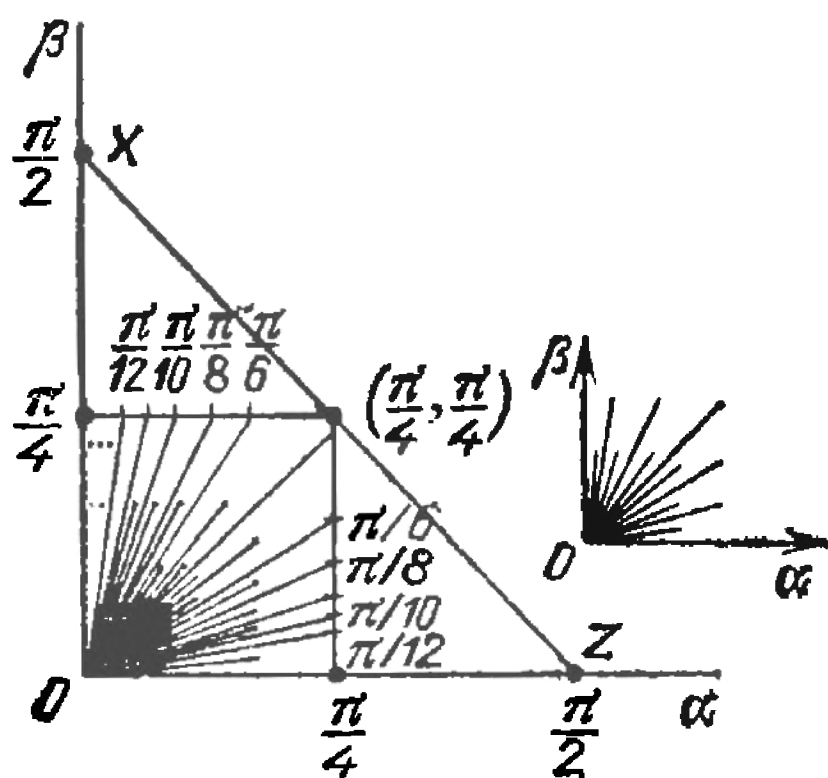


Рис. 27.10

$\gamma$  (быть может,  $\gamma'$  и  $\gamma$  совпадают). Запустим из точки  $M$  пересечения высоты  $BH$  и звена  $\gamma$  в противоположных направлениях одинаковых бильярдных шаров с равными скоростями. Через некоторое время они одновременно окажутся в точке  $M'$  пересечения высоты  $BH$  и звена  $\gamma'$ , двигаясь навстречу друг другу, оттолкнутся друг от друга и начнут двигаться симмет-

рично в обратных направлениях по уже пройденному пути. Следовательно, через какое-то время шары вновь окажутся в точке  $M$  на звене  $\gamma$ , столкнутся, и процесс начнет повторяться. Это и доказывает, что траектория  $\Gamma$  — периодическая. (Более того, отсюда вытекает, что у  $\Gamma$  имеется не более двух звеньев, параллельных  $AC$ .)

Аналогичное утверждение справедливо для любого рационального многоугольника  $Q$ , имеющего ось симметрии: послав шар перпендикулярно этой оси, получаем периодическую траекторию. Удовольствие повторить приведенное рассуждение для этого случая мы предоставляем читателям.

Конструкция I (теорема 6) дает на треугольнике  $OXZ$  диаграммы  $D$  «веер» отрезков, лежащих на прямых  $\{\beta = (k/m)\alpha\}$ , начинающихся в начале координат  $(0, 0)$  и кончающихся в точках  $\{\pi/(2k), \pi/(2m)\}$ , где  $k$  и  $m$  — всевозможные натуральные числа (рис. 27.10). «Веер» состоит из счетного множества отрезков и имеет нулевую плоскую меру.

## Конструкция II.

Два других «веера» отрезков, выходящих на диаграмме  $D$  из точек  $(\pi/2, 0)$  и  $(0, \pi/2)$ , дает следующая теорема.

**Теорема 7.** Если острые углы  $\alpha$  и  $\beta$   $\triangle ABC$  связаны равенством  $\alpha + k\beta = \pi/2$ , где  $k$  — натуральное число, причем  $2\alpha + \beta > \pi/2$ , то в  $\triangle ABC$  существует периодическая траектория. То же имеет место для треугольников, у которых  $\beta + k\alpha = \pi/2$ ,  $2\beta + \alpha > \pi/2$ .

**Следствие.** В любом прямоугольном треугольнике существует периодическая траектория (для доказательства в теореме 7 достаточно положить  $k=1$ ).

**Доказательство.** Сделав  $k$  симметричных отражений  $\triangle ABC$  по и против часовой стрелки, при которых вершина  $C$ , отвечающая углу  $\beta$ , неподвижна, получим симметричный относительно прямой  $AC$  «веер»  $AB \dots$

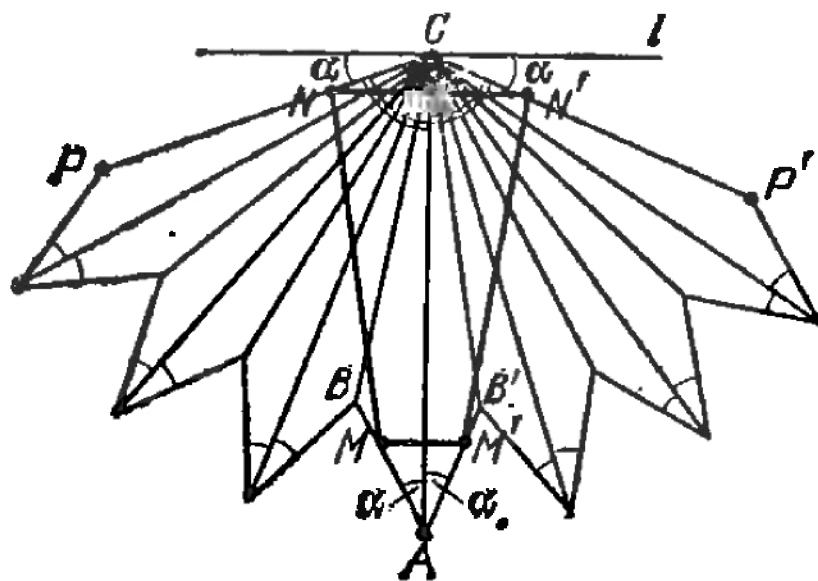


Рис. 27.11

$\dots PCP' \dots B'A$  треугольников на плоскости (рис. 27.11). Рассмотрим «ромбоид»  $ABCB'$  и в нем отрезок  $MM'$ , параллельный диагонали ромбоида  $BB'$  и близкий к ней ( $MM' \perp AC$ ). Выпустим по отрезку  $M'M$  бильярдный шар. В силу неравенства  $2\alpha + \beta > \pi/2$  шар после отражения от стороны  $AB$  пойдет по прямой  $MN$ , пересекающей все стороны треугольников, лежащих в левой полуплоскости, ограниченной прямой  $AC$  (проверьте это!). Затем он отразится по бильярдному закону от стороны  $CP$  последнего треугольника в точке  $N$ , и, в силу равенства  $\alpha + k\beta = \pi/2$ , пойдет по отрезку  $NN'$ , параллельному  $MM'$  ( $NN' \perp AC$ ; проверьте это). Оказавшись в правой полуплоскости, шар отразится от стороны  $CP'$  соответствующего треугольника в точке  $N'$  и опишет симметричную полутраекторию в правой полуплоскости.

В результате шар опишет периодическую, симметричную относительно прямой  $AC$ , четырехзвенную траекторию  $M'MNN'$  в «веере» треугольников  $AB \dots PCP' \dots B'A$ .

Сложив этот веер «гармошкой», свернем траекторию  $M'MNN'$  в периодическую траекторию  $\Gamma$  в исходном треугольнике  $ABC$ . Теорема 7 доказана.

«Веерная» конструкция из треугольников  $AB \dots PCP' \dots B'A$  дает «веер» на диаграмме  $D$ : он образован отрезками,

выходящими из точки  $Z$  диаграммы в направлении точек  $(0, \pi/2), (0, \pi/4), (0, \pi/6), \dots, (0, \pi/(2k)), \dots$ ; вторые концы этих отрезков лежат на прямой  $2\alpha + \beta = \pi/2$ , соединяющей точку  $X$  диаграммы с точкой  $(\pi/4, 0)$  (рис. 27.12).

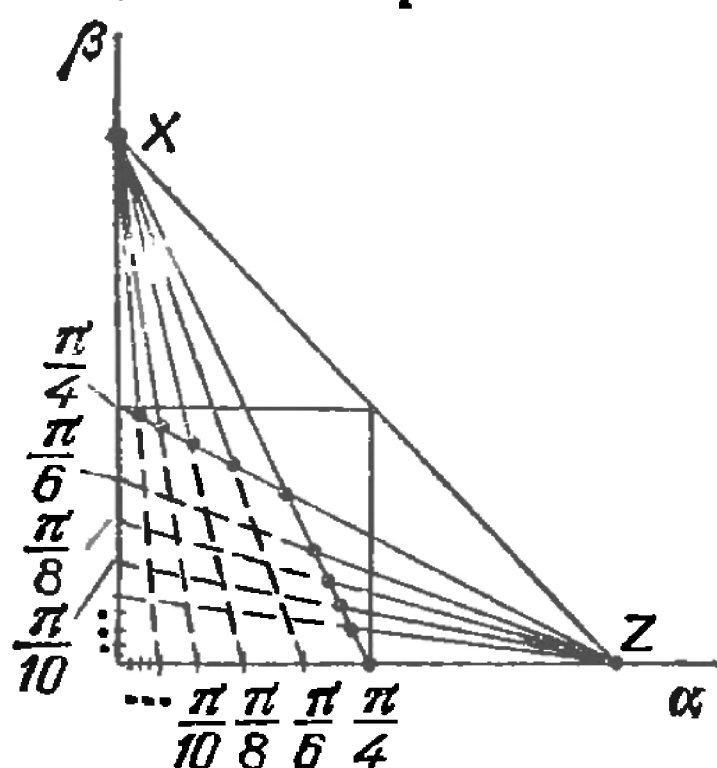


Рис. 27.12

Аналогичный «веер» выходит из точки  $X$ . Отрезки первого «веера» лежат на прямых  $\left\{ \beta = -\frac{1}{k}\alpha + \frac{\pi}{2k} \right\}$ , «сгущающихся» к оси  $O\alpha$ , а второго — на прямых  $\left\{ \beta = -k\alpha + \frac{\pi}{2} \right\}$ , «сгущающихся» к оси  $O\beta$ .

**З а м е ч а н и е.** Приведенная здесь конструкция в точности повторяет идею теоремы 5, но не использует «рациональности» углов треугольника.

А именно, периодической является любая траектория в рассматриваемом треугольнике, два звена которой перпендикулярны основанию  $AC$ .

### Конструкция III (устойчивые траектории).

В этой конструкции будут фигурировать неравенства, связывающие углы  $\alpha$  и  $\beta$ , которые дадут сразу целые о б л а с т и отмеченных на диаграмме  $D$  точек.

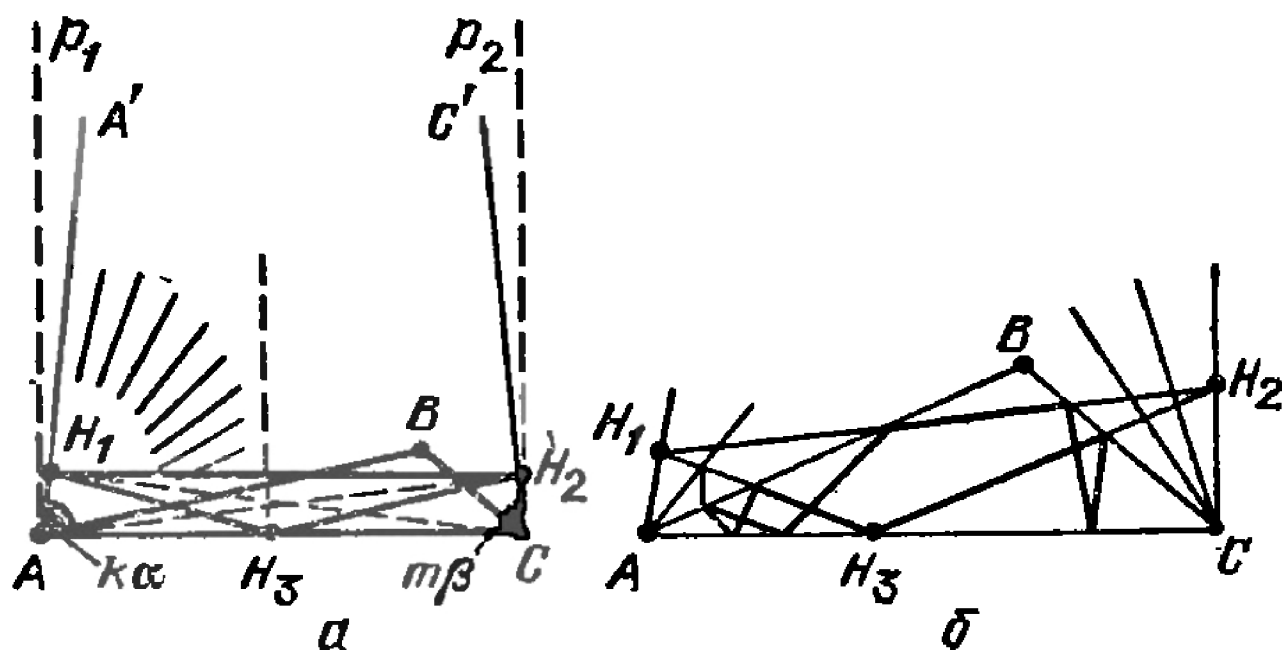


Рис. 27.13

Рассмотрим для тупоугольного  $\triangle ABC$  с острыми углами  $\alpha$  и  $\beta$  такие натуральные числа  $k$  и  $m$ , что  $k\alpha < \pi/2$  и  $m\beta < \pi/2$ , но  $(k+1)\alpha \geq \pi/2$  и  $(m+1)\beta \geq \pi/2$ . Сделаем  $k-1$  зеркальных отражений  $\angle BAC$  и  $m-1$  зеркальных отражений  $\angle ACB$  так, чтобы «крайние» лучи  $AA'$  и  $CC'$  образовывали с пря-

мой  $AC$  углы  $\angle A'AC = k\alpha$  и  $\angle C'SA = m\beta$ , лежащие в верхней полуплоскости (рис. 27.13, а). Эти крайние лучи лежат в «коридоре» между перпендикулярами  $p_1, p_2$  к отрезку  $AC$ , восстановленными в его концах  $A$  и  $C$ . Следовательно, лучи  $AA'$  и  $CC'$  пересекаются; точку их пересечения обозначим  $B'$ .

**Задача 27.3.** Доказать, что  $\triangle AB'C$  — остроугольный.

В остроугольном  $\triangle AB'C$  построим, согласно теореме 1, периодическую бильярдную траекторию  $H_1H_2H_3$ , точки излома которой — основания высот  $CH_1, AH_2$  и  $B'H_3$  (рис. 27.13, б). Если отрезок  $H_1H_2$  будет пересекать исходный  $\triangle ABC$ , т. е. этот отрезок будет лежать ниже вершины  $B$ , то сделав  $(k-1) + (m-1)$  «обратных» зеркальных отражений образов углов  $\angle BAC$  и  $\angle BCA$  вместе с кусками траектории  $H_1H_2H_3$ , мы переведем бильярдную траекторию  $H_1H_2H_3$  в  $\triangle AB'C$  в периодическую бильярдную траекторию в исходном тупоугольном  $\triangle ABC$ , содержащую  $2(k-1) + 2(m-1) + 3 = 2(k+m) - 1$  звеньев.

Итак, необходимым и достаточным условием (критерием) существования в тупоугольном  $\triangle ABC$  периодической траектории рассматриваемого вида является прохождение отрезка  $H_1H_2$  ниже вершины тупого угла  $B$ . Очевидно, что если острые углы  $\alpha$  и  $\beta$  в  $\triangle ABC$  немного «пошевелить» произвольным образом, т. е. заменить  $\triangle ABC$  на  $\triangle A_1B_1C_1$  с острыми углами  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ , мало отличающимися от  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, то в нем также будет существовать периодическая траектория рассматриваемого вида. Отсюда вытекает, что на диаграмме  $D$  отмеченные точки для данных  $k$  и  $m$  займут целую область. Следующее неравенство является критерием того, что отрезок  $H_1H_2$  пересекает  $\triangle ABC$ .

**Утверждение 1.** Отрезок  $H_1H_2$  проходит ниже вершины  $B$  (пересекает  $\triangle ABC$ ) тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - k\alpha \right) \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - m\beta \right) \operatorname{ctg} \alpha < \\ < 1 + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - k\alpha \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - m\beta \right) \end{aligned} \quad (1)$$

или эквивалентное ему неравенство

$$(1 - \operatorname{ctg} k\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha) (1 - \operatorname{ctg} m\beta \cdot \operatorname{tg} \beta) > 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta. \quad (1')$$

Утверждение 1 мы предоставляем доказать читателю самостоятельно, оставляя его в качестве не очень сложной, но довольно громоздкой элементарной геометрической задачи.

Неравенства (1), (1') задают бесконечное (счетное) число областей на диаграмме  $D$ , которые нумеруются парами натуральных чисел  $(k, m)$ . Приведем несколько более удобных последовательных ослаблений точного неравенства (1), которые также гарантируют прохождение отрезка  $H_1H_2$  ниже вершины  $B$ :

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-k\alpha\right)}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-m\beta\right)}{\operatorname{tg}\alpha} \leq 1, \quad (2)$$

$$\frac{\frac{\pi}{2}-k\alpha}{\beta} + \frac{\frac{\pi}{2}-m\beta}{\alpha} \leq 1, \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{2}-k\alpha < \frac{\beta}{2}, \quad \frac{\pi}{2}-m\beta < \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

Эти неравенства задают все меньшие и меньшие области по сравнению с областью, задаваемой неравенством (1). На их доказательстве останавливаться мы также не будем. Приведем множество точек на диаграмме  $D$ , задающееся неравенством (1) (на рис. 27.14, а изображены последовательно

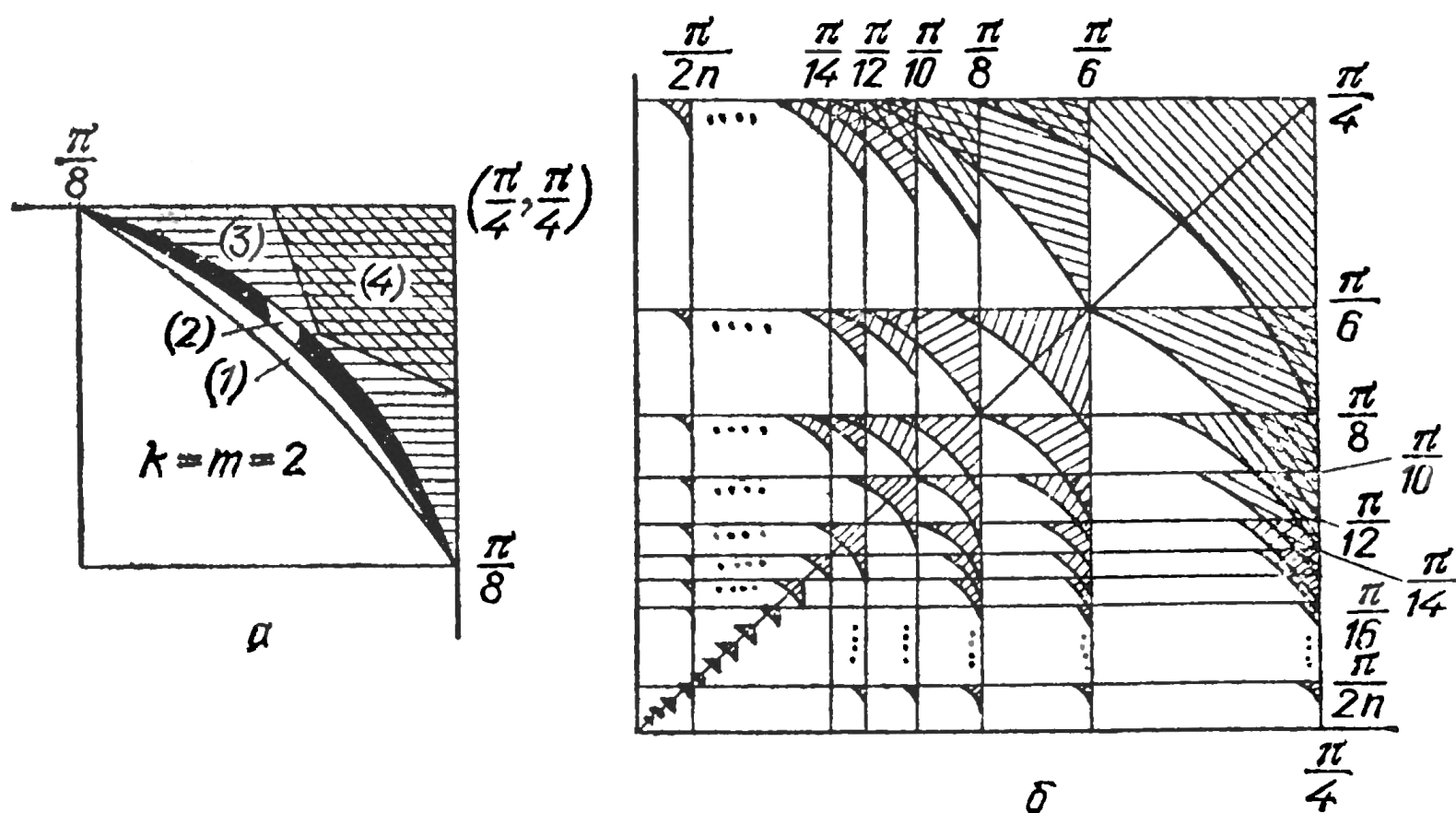


Рис. 27.14

вложенные области  $(1) \supset (2) \supset (3) \supset (4)$  для  $k=m=2$ , а на рис. 27.14, б — большая часть множества (1)). Это множество состоит из объединения бесконечного числа серий частично пересекающихся криволинейных «равнобедренных» «прямоугольных» треугольников, идущих вниз и влево от «базового» треугольника с вершиной  $\left(\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right)$ , где  $n=2, 3, 4, \dots$ . Кривые границы задаются выражением (1), в

котором знак неравенства заменен знаком равенства, и очень похожи на куски эллипсов (неравенство (3), замененное на равенство, дает в точности уравнение эллипса).

Таким образом, доказана

**Теорема 8.** Если в тупоугольном  $\triangle ABC$  острые углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют неравенствам

$$k\alpha < \frac{\pi}{2}, \quad m\beta < \frac{\pi}{2}, \quad (k+1)\alpha \geq \frac{\pi}{2}, \quad (m+1)\beta \geq \frac{\pi}{2}$$

с целыми  $k$  и  $m$  и одному из неравенств (1), (2), (3) или (4), то в нем существует периодическая траектория из  $2(k+m)-1$  звеньев и пучок «параллельных» ей периодических траекторий из вдвое большего числа звеньев.

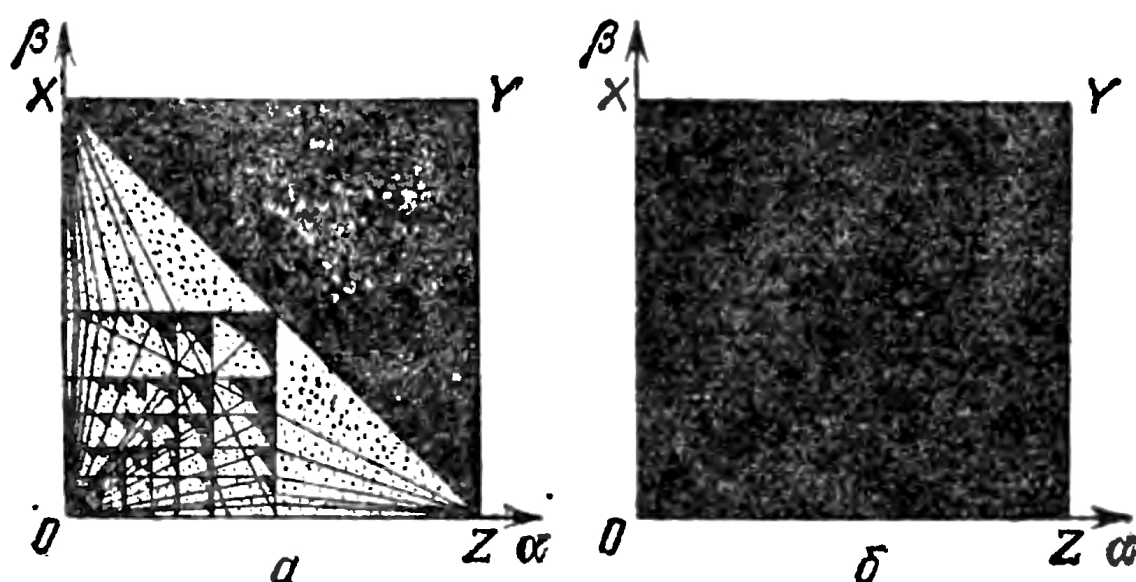


Рис. 27.15

Завершающий этап в исследовании периодических бильярдных траекторий в треугольниках состоит в одновременном изображении всех отмеченных ранее точек на диаграмме  $D$ . Это изображение получится, если мы наложим все диаграммы рис. 27.7, б, 27.10, 27.12 и 27.14, б друг на друга с изображенными на них множествами точек. В результате получим диаграмму  $D$ , которая изображена на рис. 27.15, а.

На рис. 27.15, б изображено гипотетическое множество точек, отвечающих высказанной в начале этого параграфа гипотезе, — полностью зачерненный квадрат  $OXYZ$ .

Вообще следует сказать, что периодические траектории весьма чувствительны к форме треугольника. Причина разрушения или рождения периодической траектории — прохождение через угловую точку границы. Этим обстоятельством объясняется замысловатый характер фигуры рис. 27.14, б, изображающей множество тупоугольных треугольников с периодическими траекториями, построенными в конструкции III.

10\*. Завершим этот параграф пространственным аналогом теоремы 5. Проведем через произвольную точку  $O$



пространства плоскости, параллельные всем граням некоторого многогранника  $Q$ , и начнем совершать относительно них зеркальные отражения. После каждого отражения будут получаться, кроме исходных плоскостей, новые плоскости, относительно которых также будем производить отражения.

Будем рассматривать многогранники  $Q$  со следующим свойством: *в результате всех возможных отражений относительно исходных и вновь возникающих плоскостей получится лишь конечное число направлений, перпендикулярных этим плоскостям.* Многоугольник  $Q$  на плоскости, обладающий таким свойством, является **рациональным** — все его углы соизмеримы с  $\pi$ . По аналогии многогранник  $Q$  мы будем также называть *рациональным* — все двугранные углы между любыми двумя его гранями также соизмеримы с  $\pi$  (докажите!). (Правда, в отличие от плоского случая одной только рациональности углов нам будет недостаточно.)

Все рациональные многогранники классифицированы для всех размерностей пространства. Среди них имеются многогранники, которые в научной литературе носят, в честь знаменитого математика Германа Вейля, название «камера Вейля» и появляются при изучении современного алгебро-геометрического раздела математики — теории групп и алгебр Ли. Из камер Вейля составляются рациональные многогранники. (Камеры Вейля возникают и в современных исследованиях по механике и физике.)

Как и для рациональных многоугольников, для рациональных многогранников справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 2.** *В рациональном многограннике при движении по бильярдным траекториям из данного начального направления может получиться только конечный набор направлений движения.*

**Доказательство.** «Выпрямляя» бильярдную траекторию, т. е. производя зеркальные отражения относительно тех граней многогранника, на которых расположены точки излома траекторий, в силу рациональности многогранника получаем, что в какой-то момент будет произведено отражение относительно плоскости, параллельной уже ранее рассмотренной грани. Это означает, что направление движения бильярдного шара в этот момент совпадает с одним из предыдущих его направлений движения. Следовательно, общее количество направлений движения бильярдного шара конечно, что и требовалось доказать.



Из этого утверждения вытекает

**Т е о р е м а 8.** *В любом рациональном многограннике  $Q$  существует бесконечно много периодических бильярдных траекторий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о почти дословно повторяет доказательство теорем 3, 4 и 5. Действительно, фазовое пространство  $\Omega$  бильярдной системы в  $Q$  получается из прямого произведения  $Q \times S^{n-1}$  ( $S^{n-1}$  —  $(n-1)$ -мерная сфера направлений движения шара, если  $Q$  —  $n$ -мерный многогранник) некоторыми склейками (отождествлениями точек), а в силу рациональности многогранника  $Q$  и утверждения 2 фазовая траектория в  $\Omega$  располагается лишь в конечном числе «слоев» — в многогранниках  $Q(\varphi_0), Q(\varphi_1), \dots, Q(\varphi_m)$ : в них шар движется в направлениях  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ . По теореме Пуанкаре о возвращении получаем, что фазовая точка вернется в сколь угодно близкую к начальной точку, причем под тем же направлением, под каким начала двигаться (см. теорему 4).

Если исходный угол вылета шара равен  $\varphi_0 = \pi/2$ , то шар может быть выпущен из такой точки фиксированной грани многогранника перпендикулярно ей (этих точек бесконечно много), что через некоторое время он столкнется с этой же гранью опять под прямым углом (см. теорему 5). После отражения шар начнет двигаться в обратном направлении по той же траектории. Следовательно, указанная траектория движения является периодической. Если число граней у  $Q$  равно  $N$ , то аналогичных «ортогональных» бильярдных траекторий не менее  $N/2$  — по одной для каждой грани (с учетом того, что для каких-то двух граней может получиться та же самая траектория). Вокруг каждой периодической траектории имеется целый пучок «параллельных» ей периодических траекторий, поэтому множество периодических траекторий в рациональном многограннике  $Q$  бесконечно. Теорема 8 доказана.

Доказательство существования периодической траектории в любом многограннике до сих пор не известно. Напомним только, что почти любая бильярдная траектория  $\Gamma$  в любой области  $Q$  подходит к любой своей точке  $q \in \Gamma$  сколь угодно близко и под сколь угодно малым углом (теорема 3).

**З а д а ч а 27.4.** В правильном треугольнике, как и в любом остроугольном, существуют периодические траектории из трех и из шести звеньев (рис. 27.2). Существуют ли в правильном треугольнике периодические траектории из большего числа звеньев? Из сколь угодно большого числа звеньев?

**Задача 27.5.** Бильярдный шар, отражаясь от сторон правильного треугольника, прошел через некоторую точку 7 раз. Доказать, что он пройдет через эту же точку еще хотя бы один раз. Останется ли верным это утверждение, если заменить число 7 на 6?

**Задача 27.6.** Дад рациональный многоугольник  $Q$ . Докажите, что существует число  $n = n(Q)$ , обладающее следующим свойством: если бильярдный шар в  $Q$  прошел через некоторую точку  $n$  раз, то он пройдет через нее еще хотя бы раз, а если шар прошел через эту точку меньше  $n$  раз, то, вообще говоря, через нее он может больше и не пройти.

**Задача 27.7.** Докажите утверждение задачи 26.6 для рациональных многогранников (многогранников Вейля). **Указание.** Воспользуйтесь утверждением 2 из п. 27.10.

**Задача 27.8\*** (Г. А. Гальперин, А. М. Степин). а) Докажите, что ни в каком треугольнике с попарно различными сторонами нет четырехзвенной периодической траектории. б) Существует ли остроугольный треугольник, имеющий периодическую траекторию из 5 звеньев? Из 7? Ответьте на этот вопрос для любого нечетного числа  $2k+1$ ,  $k > 3$ . в)\*\* Постройте периодическую траекторию из 15 звеньев в тупоугольном треугольнике с углами  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяющими условиям

$$\frac{\pi}{8} - \frac{1}{1000} < \alpha < \frac{\pi}{8}, \quad \frac{\pi}{3} < \beta < 3\alpha.$$

**Решение.** а) Предположим, что в некотором треугольнике имеется четырехзвенная периодическая траектория. Тогда какие-то две из четырех ее точек излома  $A, B, C, D$  находятся на одной стороне треугольника, а две другие на этой стороне не лежат. Пусть, например, на стороне  $MN$  треугольника лежат точки  $B$  и  $D$ . Однако хорошо известно, что на прямой  $MN$  существует только одна точка  $X$ , для которой  $\angle AXM = \angle CXN$  (см. рис. 4.1). Следовательно, точки  $B$  и  $D$  совпадают, и наша траектория оказывается двухзвенной, что противоречит сделанному предположению.

б) Искомый треугольник существует в обоих случаях. Строится он так, как об этом рассказано в конструкции III.

Если остроугольный  $\triangle ABC$  таков, что  $\angle B < \pi/4$ , то, отразив его симметрично относительно стороны  $BC$ , продлим сторону  $BA'$  полученного  $\triangle A'BC$  до пересечения в точке  $C'$  с продолжением стороны  $AC$  исходного треугольника. Легко видеть, что возникающий  $\triangle ABC'$  — остроугольный ( $\angle ABC' = 2\angle B < \pi/2$ ,  $C' < \angle BCA < \pi/2$ ) и поэтому в нем существует трехзвенная периодическая траектория, точки излома  $H_1, H_2, H_3$  которой — основания высот  $\triangle ABC'$ . Заметим, что высота  $BH_3$  является одновременно высотой и в  $\triangle ABC$ , поэтому точка  $H_3$  лежит внутри отрезка  $AC$ , а не на его продолжении  $CC'$  (как могло бы случайно оказаться). Кроме того,  $H_2 \in BA'$ . Отразив теперь симметрично относительно прямой  $BC$  часть трехзвенной траектории  $H_1H_2H_3$ , лежащей вне  $\triangle ABC$ , получаем 5-звенную периодическую траекторию в  $\triangle ABC$ . Другая 5-звенная периодическая траектория получается тем же способом, если сделать вначале зеркальное отражение  $\triangle ABC$  относительно стороны  $AC$ .

Аналогично строится остроугольный  $\triangle ABC$ , содержащий 7-звенную периодическую траекторию: если  $\angle B < \pi/6$ , то надо сделать два зеркальных отражения  $\triangle ABC$  вокруг вершины  $B$

против часовой стрелки, продлить сторону  $BA''$  у получившейся фигуры  $\Phi = BAA'A''$  до пересечения в точке  $C'$  с продолжением стороны  $AC$ , и построить трехзвенную периодическую траекторию  $H_1H_2H_3$  в остроугольном  $\triangle ABC'$ , целиком расположенную в фигуре  $\Phi$ . (Принадлежность траектории  $H_1H_2H_3$  фигуре  $\Phi$  можно доказать непосредственно — оставляем это читателю, а можно, проверив выполнение неравенства (1') из конструкции III, справедливое для рассматриваемого треугольника.) Сворачивая затем фигуру  $\Phi$  в трехслойную «гармошку», т. е. делая последовательно обратные отражения зеркально-симметричных треугольников вместе с расположенными в них частями траектории  $H_1H_2H_3$ , получим 7-звенную периодическую траекторию в  $\triangle ABC$ . Другая 7-звенная траектория получится, если делать отражения  $\triangle ABC$  вокруг вершины  $B$  по часовой стрелке. Заметим, кстати, что в  $\triangle ABC$  одновременно имеются и две 5-звенных периодических траектории (почему?).

Вообще, если  $\angle B < \pi/2k$  (при этом углы  $A$  и  $C$  превосходят  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2k}$ , поскольку  $\triangle ABC$  остроугольный), то вокруг вершины  $B$

можно сделать  $k-1$  зеркальных отражений  $\triangle ABC$ , а затем, получив «коридор»  $\Phi$  для частично выпрямленной траектории, по указанному выше рецепту построить остроугольный  $\triangle ABC'$  и трехзвенную (частично выпрямленную) траекторию в нем, которая при сворачивании «коридора»  $\Phi$  в гармошку даст  $3+2(k-1)=2k+1$ -звенную периодическую траекторию в  $\triangle ABC$ . В этом же треугольнике имеются также и периодические траектории из  $2k-1, 2k-3, \dots$ , 5 и 3 звеньев — это следует из того, что описанную процедуру отражений можно проделать  $k-2, k-3, \dots$  раз. Таких траекторий довольно много — ведь кроме «большого» остроугольного  $\triangle ABC'$  можно строить и другие остроугольные треугольники с вершиной  $B$ , вмещающие в себя «коридор»  $\Phi$ , а затем чертить в них соответствующие периодические траектории.

в) Построим периодическую траекторию в  $\triangle ABC$ , углы которого  $\alpha = \angle BAC$  и  $\beta = \angle BCA$  удовлетворяют неравенствам  $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{1000} < \alpha < \frac{\pi}{8}$ ,  $\frac{\pi}{3} < \beta < 3\alpha$ .

Пусть точка  $A'$  симметрична точке  $A$  относительно прямой  $BC$ ,  $B'$  — точке  $B$  относительно  $A'C$ ,  $C'$  — точке  $C$  относительно  $A'B'$ ,  $F$  — точке  $C$  относительно  $AB$ ,  $F'$  — точке  $C$  относительно  $A'F$  (рис. 27.16). Поскольку  $\beta > \pi/3$ , точка  $B'$  лежит ниже прямой  $AC$ :  $\angle ACB' = 3\beta > \pi$ . Пусть  $E$  — точка пересечения отрезка  $A'B'$  с прямой  $AC$ . Так как в  $\triangle A'EC$  угол  $A'EC$  равен  $\pi - (\alpha + (\pi - 2\beta)) = 2\beta - \alpha > 2\pi/3 - \alpha > 2\pi/3 - \pi/8 > \pi/2$ , точка  $C'$ , как симметричная точке  $C$  относительно  $A'B'$ , лежит ниже прямой  $AC$ . Оказывается, что прямая  $A'C'$  наклонена влево, т. е.  $\angle A'DC$  — острый:  $\angle A'DC = \pi - (2\alpha + (\pi - 2\beta)) = 2(\beta - \alpha) < 4\alpha < 4 \cdot \pi/8 = \pi/2$ . Из условий на  $\alpha$  и  $\beta$  следует, что  $\angle F'AC$  и  $\angle A'DA$  — острые.

Докажем, что в остроугольном  $\triangle AND$ , образованном прямыми  $AD$ ,  $AF'$  и  $DA'$  основание высоты  $H_1$ , опущенной на  $AD$ , принадлежит отрезку  $AC$ . Действительно,  $\angle A'DA = 2\beta - 2\alpha < 4\alpha = \angle F'AD$  (здесь использовано неравенство  $\beta < 3\alpha$ ) и поэтому достаточно заметить, что  $CD < AC$ . Последнее неравенство выполнено, поскольку сторона  $CD$  в  $\triangle A'CD$  лежит против угла  $CA'D$ , равного  $2\alpha$  и меньшего угла  $A'DC$ , противолежащего стороне  $A'C$  и равного  $2\beta - 2\alpha$  ( $2\alpha < \pi/4 < \pi/3 < \beta$ ).

Пусть  $H_2$  и  $H_3$  — основания высот, опущенных на боковые стороны  $\triangle AND$ . Каждый из углов  $\triangle AND$  при вершинах  $A$  и  $D$  отличается от  $\pi/2$  меньше, чем на 0,004 (проверьте!), поэтому отрезок  $H_2H_3$  пройдет ниже точки  $B$ . Фигуру  $\Phi$ , составленную из 7 треугольников, равных  $\triangle ABC$  (см. рис. 27.16), наложим «гармош-

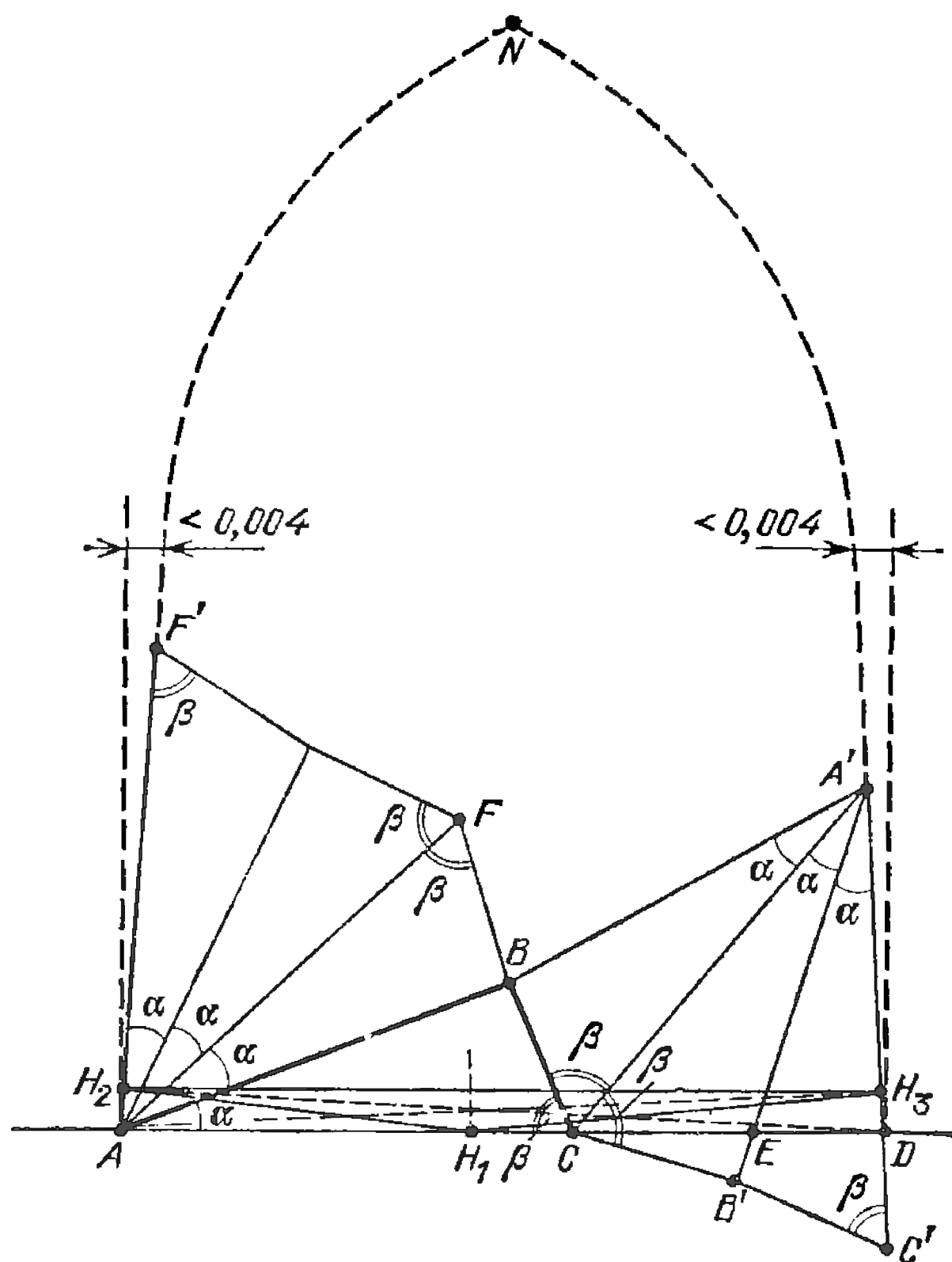


Рис. 27.16

кой» на  $\triangle ABC$ . При этом периодическая траектория  $H_1H_2H_3H_1$  в  $\Phi$  перейдет в периодическую траекторию в  $\triangle ABC$ , состоящую из 15 звеньев. Задача в) полностью решена.

Заметим, что построенная траектория  $\gamma$  в  $\triangle ABC$  из задачи 27.8 в) устойчива: это означает, что при небольшой деформации  $\triangle ABC$  (т. е. небольшими изменениями углов  $\alpha$  и  $\beta$  при его основании) она переходит в близкую к  $\gamma$  15-звенную периодическую траекторию.

Общий способ построения тупоугольных треугольников с устойчивыми периодическими траекториями таков (частный случай изложен выше в конструкции III).

Пусть для треугольника  $\Delta_0$  с вершинами  $A, B, C$  и острыми углами  $\alpha, \beta$  при основании  $AC$  построена цепочка треугольников

$$\Delta_{-2l}, \dots, \Delta_{-1}, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{2k},$$

пересекающихся с горизонтальной прямой  $AC$  и верхней полуплоскостью, причем соседние треугольники цепочки имеют общую сторону и симметричны относительно нее. Поскольку результат применения двух последовательных отражений относительно непараллельных осей есть поворот, то треугольник  $\Delta_{-2l}$  повернут относительно  $\Delta_0$  на некоторый угол  $n_1\alpha + n_2\beta + n_3\pi$ ; аналогично, треугольник  $\Delta_{2k}$  повернут относительно треугольника  $\Delta_0$  на угол  $m_1\alpha + m_2\beta + m_3\pi$ . Предположим, что пары целых чисел  $(n_1, n_2)$  и  $(m_1, m_2)$  непропорциональны, а треугольники  $\Delta_{-2l}$  и  $\Delta_{2k}$  имеют стороны, перпендикулярные прямой  $AC$ . Если к тому же на прямой  $AC$  нет других вершин треугольников цепочки, кроме  $A$  и  $C$ , то оказывается, что сколь угодно малым изменением углов  $\alpha$  и  $\beta$  можно получить треугольники, имеющие устойчивые периодические траектории.

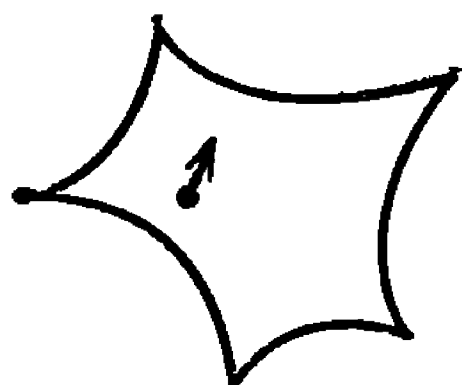
Остается только заметить, что построенная в решении задачи в) 15-звенная периодическая траектория получается применением этой общей конструкции к прямоугольному треугольнику с углом  $\pi/8$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

Изложенные в книге результаты о поведении бильярдных траекторий в специальных областях — круге, эллипсе, прямоугольнике, «рациональных» многоугольниках — дают лишь первые, начальные сведения о теории бильярдов. Хотя эти результаты красивы и интересны, но они, по сути дела, составляют лишь небольшой «островок» в теории бильярдов.

Начало современной теории бильярдов было положено в трудах Я. Г. Синая. В 1970 г. им была опубликована фун-



Бильярд Синая

Рис. 3.1

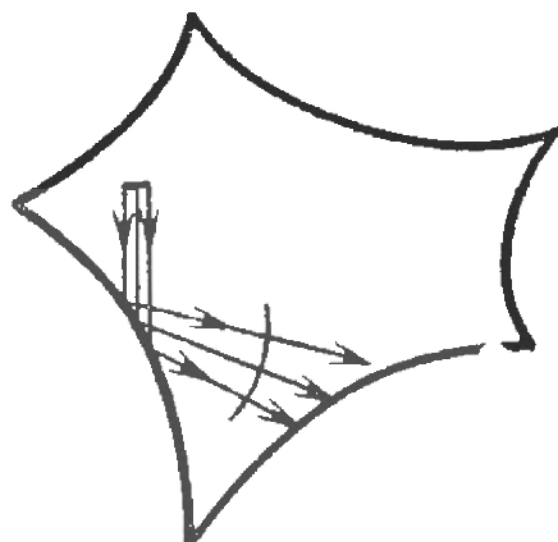


Рис. 3.2

даментальная работа [17], в которой введен и изучен большой класс бильярдных систем — так называемых *рассеивающих бильярдов*, которые впоследствии стали называться «бильярдами Синая».

*Бильярды Синая* устроены так: их граница состоит из кусков выпуклых кривых (в пространстве — кусков выпуклых поверхностей), обращенных своими выпуклостями внутрь бильярдной области (рис. 3.1). Эти бильярды являются *рассеивающими*: любой (не обязательно узкий) пучок бильярдных частиц, летящих параллельно, после отражения от выпуклой стенки разлетается расходящимся веером (рис. 3.2) и остается расходящимся при всех последующих отражениях от границы бильярдной области. Эта ситуация кардинально отличается от той, которая имеет место, ска-

жем, для бильярда в многоугольнике, где параллельный пучок после столкновения с прямолинейной стенкой остается по-прежнему параллельным, если только не попадает в вершину. В бильярде Синая близкие вначале бильярдные траектории с течением времени достаточно быстро расходятся и угол между соседними траекториями первоначально параллельного пучка возрастает после каждого отражения от границы. Поскольку площадь области  $Q$  конечна, траектории бесконечной длины начинают со временем перепутываться, что приводит к хаосу.

На строгом математическом языке это обстоятельство находит свое выражение в следующем важном свойстве бильярдных траекторий (см. [17]): *в рассеивающих бильярдах имеет место эргодичность*, т. е. типичная траектория бильярдного шара проходит сколь угодно близко от любой точки  $q$  бильярда  $Q$ , причем во всевозможных направлениях, и приводит в любой окрестности точки  $q$  долю времени, пропорциональную площади этой окрестности. Отметим также, что бильярды Синая обладают сильной *неустойчивостью*, которая характеризуется тем, что даже небольшое изменение начального состояния (положения  $q$  или скорости  $v$ ) бильярдной частицы в области  $Q$  приводит к «сильным» изменениям его траектории, которая очень быстро перестает быть похожей на исходную.

Теория рассеивающих бильярдов применяется при исследовании многих важных моделей статистической физики — при доказательстве эргодичности газа твердых сталкивающихся молекул, исследовании газа Лоренца (см. [18]) и других.

Впоследствии Л. А. Бунимович исследовал другой класс бильярдов — так называемые *фокусирующие* бильярды (или, как теперь принято их называть, *бильярды Бунимовича*), в которых, несмотря на отсутствие рассеивающих участков границы, также обнаруживается явление рассеивания и, как следствие, хаотичность поведения траекторий.

Наиболее известным и популярным примером такого бильярда является «стадион», который получится, если раздвинуть две половинки круглого бильярда и вставить между ними одинаковые параллельные отрезки (т. е. граница «стадиона» состоит из двух дуг окружностей и двух касательных к ним отрезков) — рис. 3.3, а. Несмотря на то, что два прямолинейных участка границы «стадиона» могут быть сколь угодно малыми, а сам стадион почти не отличаться от круга, бильярд в «стадионе» будет уже хаотическим!



(Напомним, что бильярдная траектория в круге не всюду плотна в нем.)

Хаотичность имеет место и для других примеров бильярдных Бунимовича, изображенных на рис. 3.3, б—з.

Бильярды на рис. 3.3, б, в являются модификациями стандартного «стадиона», поскольку имеют только круглые и прямолинейные куски границы, и поэтому их также можно называть «стадионами» (нестандартными). Границы «цветочнообразных» областей на рис. 3.3, г, д состоят только из

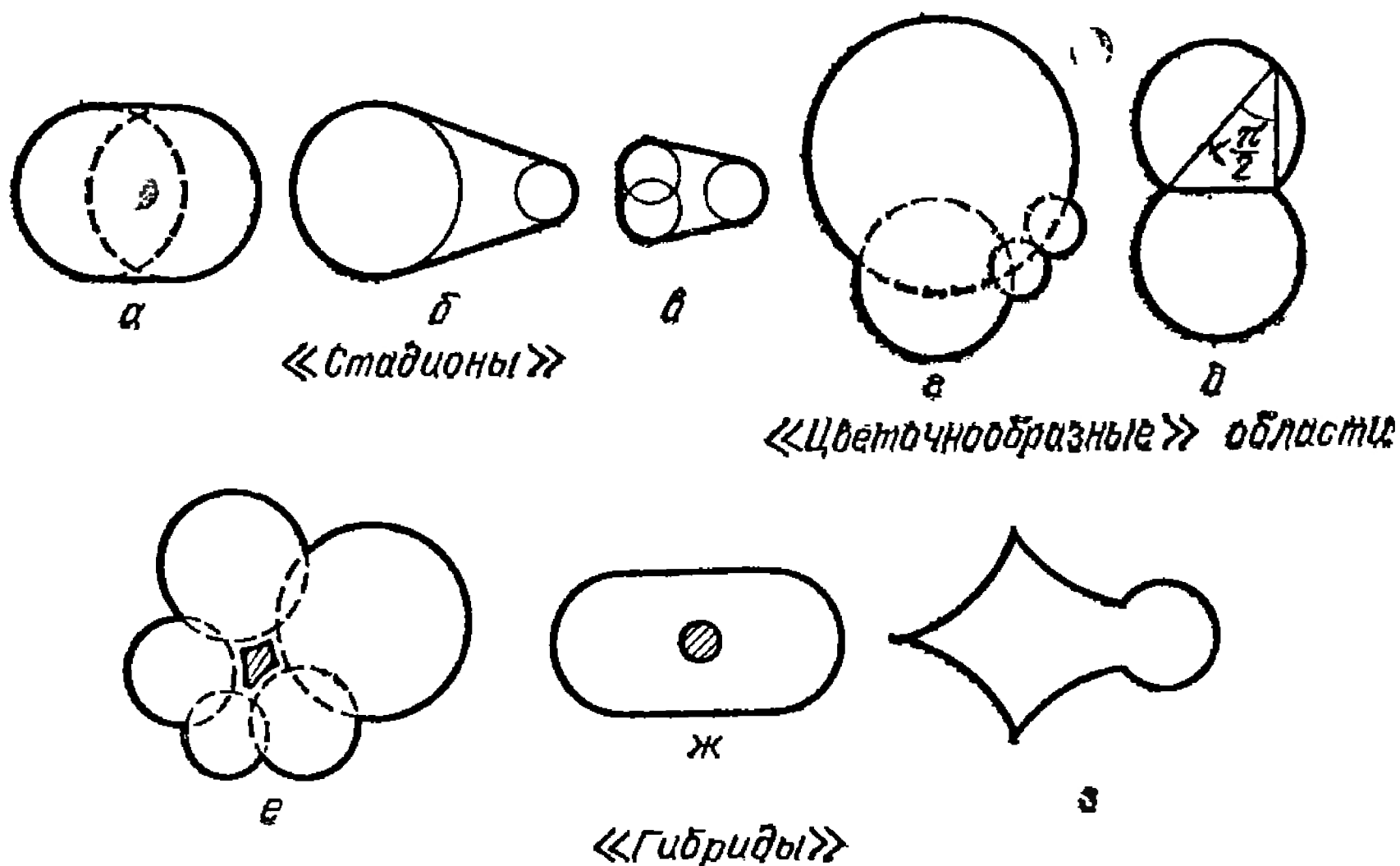


Рис. 3.3

дуг окружностей. Наконец, из рассмотренных уже областей можно вырезать разнообразные дыры (рис. 3.3, е, ж) или же создавать «гибриды» — соединять специальным образом куски рассеивающих и фокусирующих бильярдных, как на рис. 3.3, з.

Отметим, что круглые куски границ стадионов и цветочнообразных областей (дуги окружностей) обладают следующим важным свойством: дополнение к любой дуге до целой окружности расположено внутри области — только в этом случае бильярд в соответствующей области будет хаотичным. Например если рассмотреть бильярд, состоящий из двух одинаковых круглых сегментов, то, в случае когда сегмент вмещает в себя острый угол (т. е. содержит полу-круг), бильярд будет хаотичным, а когда вписанный угол прямой или тупой — хаотичности нет (рис. 3.4, а, б). Во втором случае у бильярда имеется у с т о й ч и в а я пери-

одическая траектория  $AB$  периода 2 — если эту траекторию немного «пошевелить», то возникшая новая траектория будет по-прежнему располагаться вблизи отрезка  $AB$ . В сегменте же рис. 3.4,  $a$  смещенная траектория уйдет от исходного положения и заполнит со временем всю область.

Весьма интересным является вопрос о числе геометрически различных периодических траекторий в произвольном ограниченном бильярде. Можно доказать, что для строго выпуклого бильярда с гладкой границей на плоскости число  $N(n)$  периодических траекторий, имеющих не более чем  $n$  звеньев, при больших  $n$  не меньше  $3n^2/\pi^2$ . Эта оценка была фактически известна еще Биркгофу, который определял число  $k$ -звенных траекторий для каждого  $k$  от 3 до  $n$  (см. § 6).

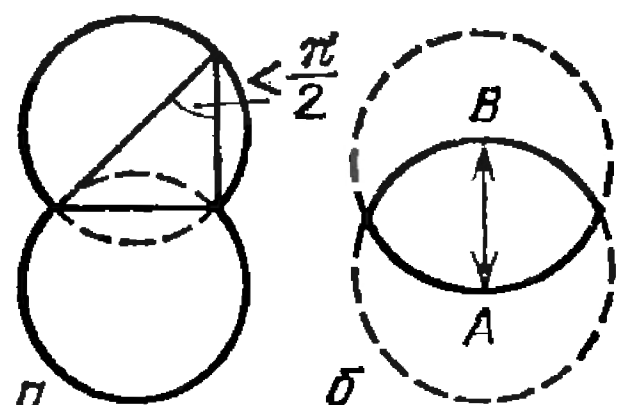


Рис. 3.4

Совсем недавно И. К. Бабенко, используя средства современной топологии, доказал, что для строго выпуклого бильярда с гладкой границей в трехмерном пространстве число  $N(n)$  при больших  $n$  не меньше  $n^2/2 \ln n$ .

Вообще говоря, такая оценка является довольно грубой и во многих случаях может быть улучшена. В случае рассеивающего бильярда Я. Г. Синаем, Н. И. Черновым и Л. А. Бунимовичем недавно получена асимптотически точная оценка числа  $N(n)$ :  $2^{c_1 n} \leq N(n) \leq 2^{c_2 n}$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — некоторые топологические характеристики рассматриваемого бильярда. Таким образом, в бильярдах Сина число периодических траекторий растет экспоненциально с ростом числа звеньев  $n$ . Кроме того, можно показать, что периодические траектории рассеивающего бильярда всюду плотны в фазовом пространстве. Имеются также соображения в пользу того, что и в выпуклом бильярде с гладкой границей общего вида число периодических траекторий растет экспоненциально с ростом  $n$ .

Напоследок упомянем о так называемых осциллирующих бильярдах на бесконечных бильярдных столах. Бильярд называется *осциллирующим*, если у него существуют осциллирующие траектории — временами уходящие сколь угодно далеко, а временами возвращающиеся. Поведение бильярдного шара на столе, уходящем в бесконечность, является моделью движения частицы в электромагнитных полях, определенных конфигурацией («ловушках»).

Следующий специальный класс осциллирующих бильярдов исследовал А. М. Леонтович (1962 г.). Рассмотрим

стол, ограниченный осью абсцисс и «колоколообразной» кривой — графиком положительной непрерывной четной гладкой функции  $f(x)$ , стремящейся при  $|x| \rightarrow \infty$  к некоторой прямой  $y=A \geq 0$  (рис. 3.5). Бильярдная траектория будет неограниченной, если она не заключается в полосу  $x_1 \leq x \leq x_2$  ни при каких  $x_1$  и  $x_2$ , и осциллирующей, если она пересекает ось  $Oy$  бесконечно много раз. А. М. Леонтович доказал, что при  $A > 0$  существуют и осциллирующие траектории (но существует и бесконечно

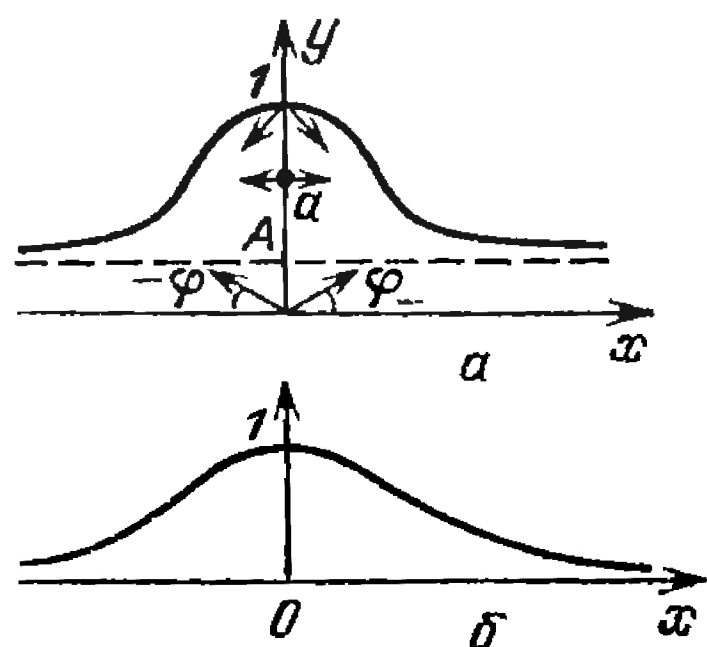


Рис. 3.5

много неосциллирующих, уходящих на бесконечность без возвращения к оси  $Oy$ ), а при  $A=0$  любая траектория — осциллирующая (среди них есть как ограниченные, так и неограниченные траектории).

При изучении бильярдов в неограниченных областях естественно возникает постановка задачи о рассеянии в области параллельного пучка частиц (или волнового фронта). Рас-

сматривая эту задачу, А. Ю. Плахов и А. М. Степин описали области, для которых рассеянный (уходящий) пучок параллелен исходному (входящему). Такое поведение пучка является аналогом квантового эффекта аномального рассеяния, впервые экспериментально обнаруженного в 1986 г. Б. Я. Зельдовичем и его коллегами по Физическому институту АН СССР.

В действительности современная теория бильярдов не ограничивается только упомянутыми выше системами: имеется много других классов бильярдов, которые сейчас исследуются математиками и физиками. Долгое время при изучении таких бильярдов основное внимание уделялось вопросам о хаотичности траекторий; в этом направлении в последнее время были получены весьма общие результаты. Однако наряду с этим никогда не ослабевал интерес и к таким задачам, которые рассматривались в нашей книге. Для их решения, по-видимому, нельзя предложить столь же общие методы, и поэтому решение конкретных задач всегда представляет известный интерес, тем более что, как мы уже отмечали, оно иногда достигается применением элементарных приемов.

Тех читателей, которые захотят попробовать здесь свои силы, ждет широкое поле деятельности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. Кориолис Г. Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. — М.: Гостехиздат, 1956.
2. Борахвостов В. Бильярд // Наука и жизнь. 1966. №№ 2—4, 6, 11.
3. Гальперин Г. А. Бильярд // Квант. 1981. № 4.
4. Земляков А. Н. Математика бильярда // Квант. 1976. № 5.
5. Земляков А. Н. Арифметика и геометрия столкновений // Квант. 1978. № 4.
6. Земляков А. Н. Бильярды и поверхности // Квант. 1979. № 9.
7. Синай Я. Г. Бильярдные траектории в многогранном угле // Успехи математических наук. 1978. Т. 33, вып. 1.
8. Гальперин Г. А. Упругие столкновения частиц на прямой // Успехи математических наук. 1978. Т. 33, вып. 1.
9. Гальперин Г. А. О системах абсолютно упругих шаров, движущихся в пространстве или сосуда // Доклады АН СССР. 1979. Т. 245, № 2.
10. Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию (лекция 10). — Ереван: Изд-во Ереванского университета, 1973.
11. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. — М.: Наука, 1980. — Гл. 6.
12. Биркгоф Г. Динамические системы. — М.; Л.: ОГИЗ, 1941.
13. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979.
14. Гальперин Г. А., Степин А. М. Периодические движения бильярдного шара // Квант. 1989. № 3.
15. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. — М.: Наука, 1986 (Библиотечка «Квант». Вып. 56).
16. Берже М. Геометрия: в 2-х томах. — М.: Мир, 1984. — Гл. 9 и 17.
17. Синай Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // Успехи математических наук. 1970. Т. 25, вып. 2.
18. Синай Я. Г. Эргодические свойства газа Лоренца // Функциональный анализ и его приложения. 1979. Т. 13, вып. 3.
19. Земляков А. Н., Каток А. Б. Топологическая транзитивность бильярдов в многоугольниках // Математические заметки. 1975. Т. 18, № 2.

Научно популярное издание

*ГАЛЬПЕРИН Григорий Александрович*

*ЗЕМЛЯКОВ Александр Николаевич*

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БИЛЬЯРДЫ**

**(бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики)**

---

**Библиотечка «Квант»: выпуск 77**

Заведующий редакцией *Г. С. Куликов*

Редактор *А. Г. Мордвинцев*

Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*

Технический редактор *Е. В. Морозова*

Корректоры *О. М. Карпова, Л. С. Сомова*

ИБ № 32724

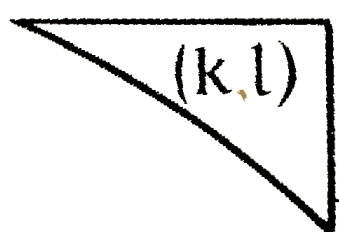
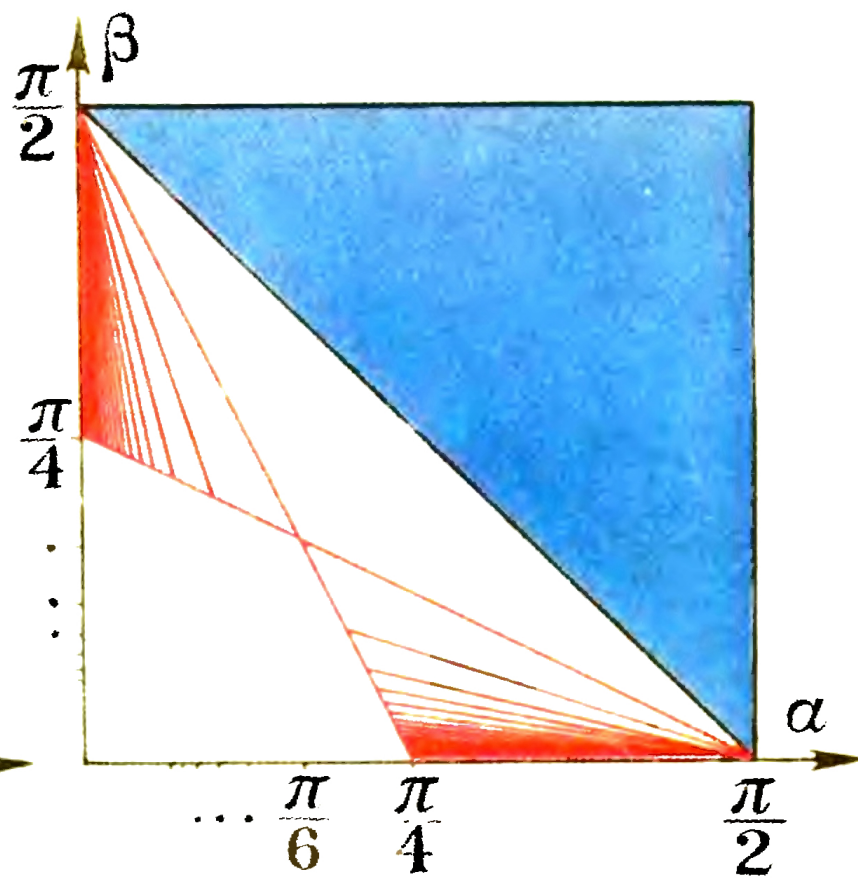
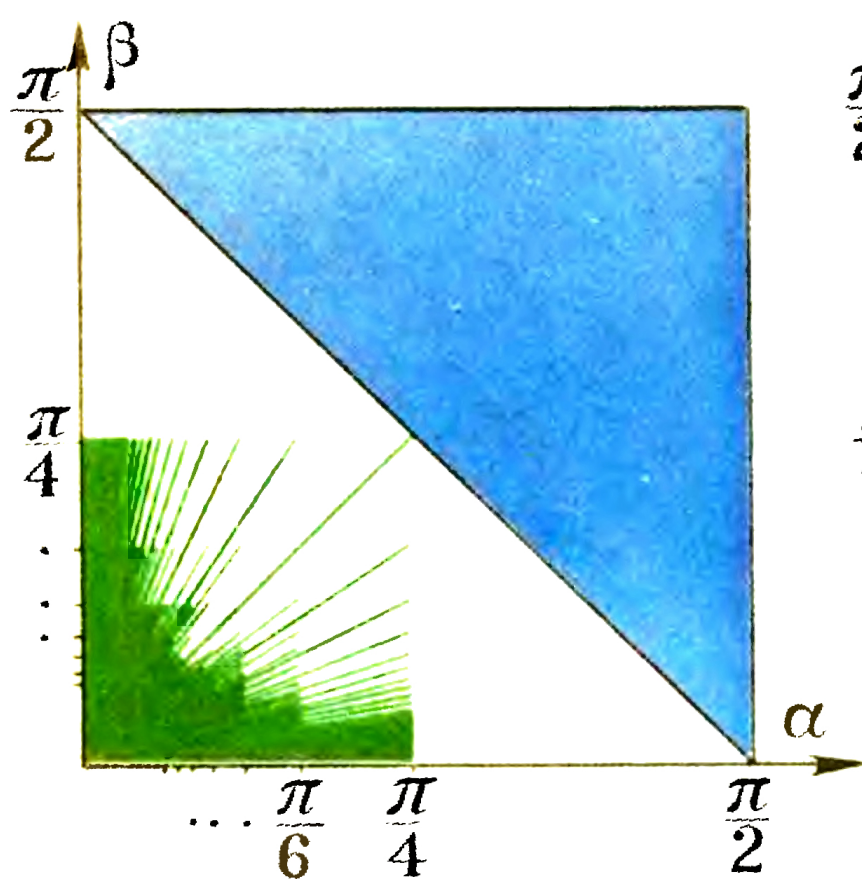
Сдано в набор 20.06.89. Подписано к печати 23.01.90. Т-06432. Формат 84×108/32. Бумага офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 15,12. Усл. кр.-отт. 15,96. Уч.-изд. л. 16,92. Тираж 130 000 экз. Заказ № 9—325 Цена 65 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени  
МПО «Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР  
по печати. 113054 Москва, Валовая, 28

Отпечатано на полиграфкомбинате ЦК ЛКСМ Украины «Молодь» ордена Трудового Красного Знамени издательско-полиграфического объединения ЦК ВЛКСМ «Молодая гвардия»: 252119, г. Киев-119, ул. Пархоменко, 38—44.





$\rightarrow 2(k+l)-1$ -звенная траектория

